

# VÝPOČET DEFORMACE VÁLCOVÉ MEMBRÁNY Z KOMPOZITNÍHO MATERIÁLU S PRYŽOVOU MATRICÍ A KORDOVOU VÝZTUŽÍ ZATÍŽENÉ VNITŘNÍM PŘETLAKEM

Bohdana Marvalová a Tran Huu Nam<sup>1</sup>

## Abstrakt

*Deformace válcové pryžové membrány vyztužené symetricky dvěma spirálovými skupinami kordů zatížené vnitřním přetlakem byla určena výpočtem pomocí MKP v prostředí Matlab. Základní rovnice membránového osově symetrického elementu byly odvozeny na základě Lagrangeovského kinematického popisu. Konstitutivní vztahy daného hyperelastického materiálu byly odvozeny z funkce deformační energie vyjádřené v závislosti na hlavních prodlouženích, která se skládá ze dvou částí - izotropní část modeluje pryžový materiál matrice a byl pro ní použit Ogdenův model pro pryž, druhá část funkce modeluje lokálně ortotropní vlastnosti materiálu a je exponenciální popř. mocninnou funkcí prodloužení ve směru kordové výztuže. Parametry funkce deformační energie byly stanoveny pomocí experimentálního měření deformace pláště pružiny při zatížení vnitřním přetlakem a při jejich různých osově symetrických konfiguracích.*

## 1. Úvod

Problém určit deformaci válcové membrány vyplynul z potřeby stanovit parametry kompozitního materiálu pláště a deformace pneumatické pružiny používané k utlumení vibrací sedačky řidiče. Plášť pružiny je čtyřvrstvý kompozit. Vnější a vnitřní vrstva je pryžová, vnitřní dvě vrstvy jsou z pryže vyztužené kordy spirálově vinutými symetricky vzhledem k ose pružiny. Vzhledem k symetrii výztuže a k zatížení tlakem chová se materiál jako ortotropní i v deformovaném stavu. Konstitutivní vztahy daného hyperelastického materiálu byly odvozeny z funkce deformační energie vyjádřené v závislosti na hlavních prodlouženích, která se skládá ze dvou částí - izotropní část modeluje pryžový materiál matrice a byl pro ní použit Ogdenův model pro pryž [10], druhá část funkce modeluje lokálně ortotropní vlastnosti materiálu a je exponenciální [6,7] popř. mocninnou funkcí prodloužení ve směru kordové výztuže.

Parametry funkce deformační energie byly stanoveny pomocí experimentálního měření deformace pláště pružiny při zatížení vnitřním přetlakem a při jejich různých osově symetrických konfiguracích [1,3-5]. Z membránové teorie byla vypočtena osová a obvodová napětí pro daný tlak a změřený tvar pružiny a po dosazení napětí a deformací do konstitutivních vztahů byly stanoveny parametry funkce deformační energie jako řešení

---

<sup>1</sup> Doc. Ing. Bohdana Marvalová, CSc, Ing. Tran Huu Nam, Katedra mechaniky a pružnosti SF, TU v Liberci, [bohda.marvalova@vslib.cz](mailto:bohda.marvalova@vslib.cz), [huunam.tran@vslib.cz](mailto:huunam.tran@vslib.cz)

soustavy nelineárních rovnic.

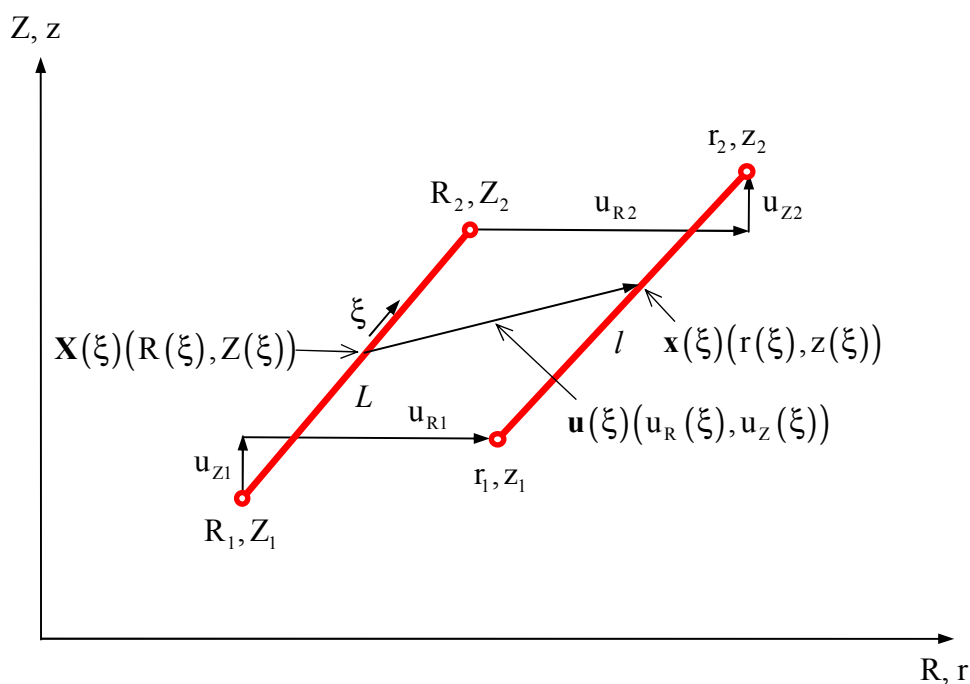
Pro ověření těchto parametrů a zjištění jejich vlivu na deformaci pláště byla deformace membrány nejprve řešena numerickou integrací soustavy diferenciálních rovnic problému [8,9] pomocí shooting method v prostředí MATLAB [2].

Metoda konečných prvků pro výpočet deformace izotropních membrán je používána poměrně často [12-14]. Aplikace MKP na ortotropní membrány z hyperelastického nestlačitelného materiálu je méně častá [11,15,16]. Tyto práce se většinou týkají deformace arterií, nebo tepelného tváření vyztužených plastů.

V naší práci jsou základní rovnice membránového osově symetrického elementu odvozeny na základě Lagrangeovského kinematického popisu [14], radiální souřadnice prvku a radiální a osově posuvy uzlových bodů jsou interpolovány jako lineární funkce izoparametrické souřadnice. Konstitutivní vztahy hyperelastického lokálně ortotropního materiálu jsou odvozeny z funkce deformační energie. Matice tuhosti materiálu a vektor vnějších sil (zatížení tlakem vzdušiny) závisí na deformované konfiguraci a jsou updatovány v každém kroku. Deformace membrány byla vypočtena pro různé okrajové podmínky - pevná čela, čela volně posuvná v osovém směru, zatížení čela osovou silou ap. K řešení byla použita Newtonova metoda s přírůstkem zatížení, který byl řízen podle počtu iterací posledního konvergujícího kroku. Tímto způsobem se podařilo určit deformace membrány až do prvního bodu bifurkace, kdy se ve středu membrány vytváří boule. Vzhledem k tomu, že při daném způsobu řešení nelze stanovit limitní a bifurkační body a provést stabilitní analýzu, je nutné použít odlišnou strategii řešení pomocí metody arc-length.

## 2. Axisymetrický membránový prvek

Membránový prvek je na Obr.1. V referenční konfiguraci má prvek délku  $L$  a tloušťku  $H$ , v aktuální konfiguraci má délku  $l$ . Element má čtyři uzlové posuvy  $\mathbf{u} = \{u_{R1}, u_{Z1}, u_{R2}, u_{Z2}\}^T$ .



Obr. 1 Axisymetrický membránový prvek

Souřadnice a posuvy jsou parametricky interpolovány z uzlových hodnot:

$$\mathbf{X}(\xi) = \mathbf{N} \cdot \{R_l, Z_l, R_2, Z_2\}^T, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{x}(\xi) = \mathbf{N} \cdot \{r_l, z_l, r_2, z_2\}^T, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{u}(\xi) = \mathbf{x}(\xi) - \mathbf{X}(\xi) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{u}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{u} = \{u_{Rl}, u_{Zl}, u_{R2}, u_{Z2}\}^T, \quad (2.4)$$

kde

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 1+\xi & 0 \\ 0 & 1-\xi & 0 & 1+\xi \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Při formulaci vnitřní energie v totálním Lagrangeovském (TL) popisu se používá Green-Lagrangeův (GL) tenzor deformace a druhý Piola-Kirchhoffův (PK2) tenzor napětí jako konjugovaná dvojice.

Axiální složku GL můžeme jednoduše odvodit ze změny délky elementu:

$$E_{11} = \frac{l^2 - L^2}{2L^2} = (\mathbf{b}_l + \mathbf{b}_l(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{u}, \quad (2.6)$$

kde

$$\mathbf{b}_l = \frac{1}{L^2} \{R_l, Z_l, R_2, Z_2\} \cdot \mathbf{A},$$

$$\mathbf{b}_l(\mathbf{u}) = \frac{1}{2L^2} \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Variaci  $\delta E_{11}$  vyvolanou variací  $\delta \mathbf{u}$  můžeme vyjádřit jako

$$\delta E_{11} = (\mathbf{b}_l + 2\mathbf{b}_l(\mathbf{u})) \cdot \delta \mathbf{u} = \frac{1}{L^2} (\{R_l, Z_l, R_2, Z_2\} + \mathbf{u}^T) \cdot \mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{u} \quad (1.8)$$

Obvodovou složku GL určíme ze změny obvodu kružnice :

$$E_{22} = \frac{O^2 - O^2}{2O^2} = \frac{u_R(\xi)}{R(\xi)} + \frac{1}{2} \left( \frac{u_R(\xi)}{R(\xi)} \right)^2 = e_l + \frac{1}{2} e_l^2, \quad (2.9)$$

$$e_l = \frac{1}{R(\xi)} \mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{u}, \quad (2.10)$$

$$\delta E_{22} = (1 + e_l) \delta e_l = (1 + e_l) \frac{1}{R(\xi)} \mathbf{N}_1 \cdot \delta \mathbf{u}, \quad (2.11)$$

$$\delta \mathbf{E} = \begin{Bmatrix} \delta E_{11} \\ \delta E_{22} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_{nl} \cdot \delta \mathbf{u}, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{B}_{nl} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{nl1} \\ \mathbf{B}_{nl2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} (\{R_l, Z_l, R_2, Z_2\} + \mathbf{u}^T) \cdot \mathbf{A} \\ \left(1 + \frac{1}{R(\xi)} \mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{u}\right) \frac{1}{R(\xi)} \mathbf{N}_1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

### 3. Konstitutivní vztahy

Odvodíme vztah mezi PK2 a GL z funkce deformační energie daného hyperelastického ortotropního materiálu vyjádřené v závislosti na hlavních prodlouženích  $\lambda_i$ . Připomeňme, že v daném rotačně symetrickém případě máme PK2 a GL v hlavních složkách, že hlavní směry se během zatěžování nemění a že materiál zůstává ortotropní i po deformaci. Pro daný materiál jsme zvolili funkci složenou z izotropní části – Ogdenův model pro pryž - a z exponenciální části [1-2,7,16], která modeluje vliv kordové výztuže. Použijeme-li podmínku nestlačitelnosti materiálu  $J = \det \mathbf{F} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ , můžeme funkci deformační energie zapsat ve tvaru:

$$\begin{aligned} \Psi(\lambda_1, \lambda_2) = & \sum_{a=1}^3 \frac{\mu_a}{\alpha_a} (\lambda_1^{\alpha_a} + \lambda_2^{\alpha_a} + \lambda_1^{-\alpha_a} \lambda_2^{-\alpha_a} - 3) + \\ & + \frac{k_1}{k_2} \{ \exp[k_2 (\lambda_2^2 \cos^2 \gamma + \lambda_1^2 \sin^2 \gamma - 1)^2] - 1 \}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

kde  $\gamma$  je úhel, který svírají kordy s obvodovým směrem.

Parametry  $\mu_i$  a  $\alpha_i$  Ogdenova modelu pro pryž [10] jsou

$$\mu_1 = 630 \text{ kPa}, \quad \mu_2 = 1.2 \text{ kPa}, \quad \mu_3 = -10 \text{ kPa},$$

$$\alpha_1 = 1.3, \quad \alpha_2 = 5, \quad \alpha_3 = -2.$$

Parametr  $k_1 = 4.19 \times 10^4 \text{ kPa}$ , který má rozměr napětí a bezrozměrný parametr  $k_2 = -23.8$  jsme určili z výsledků experimentů [2].

Pro nestlačitelný materiál lze složky PK2 odvodit z funkce deformační energie podle vztahu:

$$S_{ii} = \frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_i}, \quad i = 1, 2 \quad (3.2)$$

$$S_{11} = \sum_{a=1}^3 \frac{\mu_a}{\lambda_1^2} \left[ \lambda_1^{\alpha_a} - (\lambda_1 \lambda_2)^{-\alpha_a} \right] + 4k_1 m \exp(k_2 m^2) \sin^2 \gamma \quad (3.3)$$

$$S_{22} = \sum_{a=1}^3 \frac{\mu_a}{\lambda_2^2} \left[ \lambda_2^{\alpha_a} - (\lambda_1 \lambda_2)^{-\alpha_a} \right] + 4k_1 m \exp(k_2 m^2) \cos^2 \gamma$$

kde

$$m = \lambda_2^2 \cos^2 \gamma + \lambda_1^2 \sin^2 \gamma - 1. \quad (3.4)$$

Složky  $E_{11}$  a  $E_{22}$  GL lze rovněž vyjádřit v závislosti na hlavních prodlouženích:

$$E_{ii} = \frac{\lambda_i^2 - 1}{2} \Rightarrow \frac{\partial \lambda_i}{\partial E_{ii}} = \frac{1}{\lambda_i}, \quad i = 1, 2 \quad (3.5)$$

Určíme tenzor elasticity  $\mathbb{C}$  z hlavních složek PK2 [31, str.258]

$$\mathbb{C} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}}, \quad \mathbb{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial S_{11}}{\partial \lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2} \frac{\partial S_{11}}{\partial \lambda_2} \\ \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial S_{22}}{\partial \lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2} \frac{\partial S_{22}}{\partial \lambda_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \mathbb{C} \mathbf{E}. \quad (3.6)$$

Tento tenzor není konstantní, ale závisí na deformacích a je třeba ho v jednotlivých krocích výpočtu updatovat.

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{11} &= \frac{1}{\lambda_1^4} \sum_{a=1}^3 \mu_a \left[ (\alpha_a - 2) \lambda_1^{\alpha_a} + (\alpha_a + 2) (\lambda_1 \lambda_2)^{-\alpha_a} \right] + \\ &\quad + 8k_1 \exp(k_2 m^2) \sin^4 \gamma (1 + 2k_2 m^2) \\ \mathbb{C}_{12} = \mathbb{C}_{21} &= \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \sum_{a=1}^3 \mu_a \alpha_a (\lambda_1 \lambda_2)^{-\alpha_a} + \\ &\quad + 8k_1 \exp(k_2 m^2) \sin^2 \gamma \cos^2 \gamma (1 + 2k_2 m^2) \\ \mathbb{C}_{22} &= \frac{1}{\lambda_2^4} \sum_{a=1}^3 \mu_a \left[ (\alpha_a - 2) \lambda_2^{\alpha_a} + (\alpha_a + 2) (\lambda_1 \lambda_2)^{-\alpha_a} \right] + \\ &\quad + 8k_1 \exp(k_2 m^2) \cos^4 \gamma (1 + 2k_2 m^2) \end{aligned} \quad (3.7)$$

#### 4. Princip virtuálních prací a jeho linearizace

Vnitřní virtuální práci je výhodné vyjádřit v materiálové konfiguraci, zatímco vnější virtuální práci, vykonanou vnějším tlakem, je vhodné zapsat v prostorovém popisu (připomeňme, že se zde jedná o nekonzervativní zatížení – follower load, které závisí na deformaci a které vnáší do matice tuhosti přídatnou nesymetrickou matici).

Princip virtuálních prací v daném případě lze zapsat:

$$R(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}, p) = \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV - p \int_{\partial \Omega} \mathbf{n}^T \cdot \delta \mathbf{u} ds = 0, \quad (4.1)$$

kde  $\Omega_0$  je nedeformovaný objem,  $\partial\Omega$  je povrch v deformované konfiguraci a  $\mathbf{n}$  je vektor normály k zatíženému povrchu. Zavedeme-li součinitel vnějšího zatížení  $\lambda$ , pak

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{R}(\mathbf{u}, \lambda)^T \cdot \delta\mathbf{u} = (\mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{f}_{\text{ext}}(\mathbf{u}))^T \cdot \delta\mathbf{u}, \quad (4.2)$$

kde  $\mathbf{R}(\mathbf{u}, \lambda)$  je vektor residuální síly, který má být nulový, aby bylo dosaženo rovnováhy.

Vektor vnitřní síly elementu:

$$\mathbf{f}_{\text{int}}^e = \int_{-1}^1 \mathbf{B}_{\text{nl}}^T \mathbf{S} 2\pi R(\xi) H L d\xi, \quad (4.3)$$

vektor vnější síly elementu:

$$\mathbf{f}_{\text{ext}}^e = \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{n}(\xi) 2\pi r(\xi) l d\xi, \quad \mathbf{n}(\xi) = \frac{1}{l} \begin{Bmatrix} z_2 - z_l \\ -(r_2 - r_l) \end{Bmatrix}, \quad (4.4)$$

$$r(\xi) = \mathbf{N}_1 \cdot \{r_l, z_l, r_2, z_2\}^T$$

Máme tedy soustavu nelineárních rovnic:

$$\mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{f}_{\text{ext}}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad (4.5)$$

která je neurčitá. Zvolíme-li součinitel vnějšího zatížení  $\lambda$  jako parametr, pak řešení této soustavy získáme pomocí inkrementálních iteračních technik, které jsou modifikacemi Newtonovy metody. Zatížení je postupně zvyšováno a v každém kroku se provádí iterace až do dosažení rovnováhy. Provádíme-li iteraci v  $n$ -tém kroku při konstantním zatížení  $\lambda_n = \text{konst}$ , pak Jacobiho maticí dané soustavy rovnic je matice tečné tuhosti  $\mathbf{K}_t$

$$\mathbf{K}_t = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{u}} - \lambda_n \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{ext}}}{\partial \mathbf{u}} \right]. \quad (4.6)$$

Pro výpočet posuvů v  $n$ -tém zatěžovacím kroku dostáváme posloupnost:

$${}^{k+1}\mathbf{u} = {}^k\mathbf{u} - [\mathbf{K}_t({}^k\mathbf{u})]^{-1} (\mathbf{f}_{\text{int}}({}^k\mathbf{u}) - \lambda_n \mathbf{f}_{\text{ext}}({}^k\mathbf{u})) = {}^k\mathbf{u} - [\mathbf{K}_t({}^k\mathbf{u})]^{-1} \mathbf{R}({}^k\mathbf{u}, \lambda_n), \quad (4.7)$$

která konverguje v okolí řešení pokud  $\det \mathbf{K}_t \neq 0$ .

## 5. Výpočet matice tuhosti

Derivací vektoru vnitřní síly elementu dostáváme:

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}^e}{\partial \mathbf{u}} = \int_{-1}^1 \left( \frac{\partial \mathbf{B}_{nl}^T}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{S} + \mathbf{B}_{nl}^T \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{u}} \right) 2\pi R(\xi) H L d\xi, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}^e}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{K}_G^e + \mathbf{K}_M^e, \quad (5.2)$$

$$\mathbf{K}_G^e = \int_{-1}^1 \mathbf{B}_{nl}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{nl} 2\pi R(\xi) H L d\xi, \quad (5.3)$$

$$\mathbf{K}_M^e = \int_{-1}^1 \left( \frac{S_{11}}{L^2} \mathbf{A} + \frac{S_{22}}{R^2(\xi)} \mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_1 \right) 2\pi R(\xi) H L d\xi \quad (5.4)$$

Derivací vektoru vnější síly dostáváme nesymetrickou matici:

$$\mathbf{K}_p^e = \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{ext}}^e}{\partial \mathbf{u}} = \frac{2\pi}{3} \begin{bmatrix} 2z_{21} & -(2r_1 + r_2) & z_{21} & 2r_1 + r_2 \\ 4r_1 - r_2 & 0 & -(r_1 + 2r_2) & 0 \\ z_{21} & -(r_1 + 2r_2) & 2z_{21} & r_1 + 2r_2 \\ 2r_1 + r_2 & 0 & r_1 - 4r_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

$$z_{21} = z_2 - z_1, \quad \{r_1, z_1, r_2, z_2\} = \{R_1, Z_1, R_2, Z_2\} + \{u_{R1}, u_{Z1}, u_{R2}, u_{Z2}\}$$

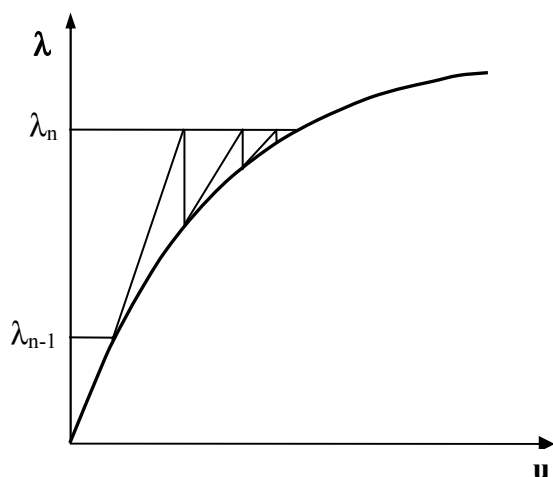
Celková matice tečné tuhosti elementu je součtem jednotlivých matic:

$$\mathbf{K}_t^e = \mathbf{K}_G^e + \mathbf{K}_M^e - \lambda_n \mathbf{K}_p^e. \quad (5.6)$$

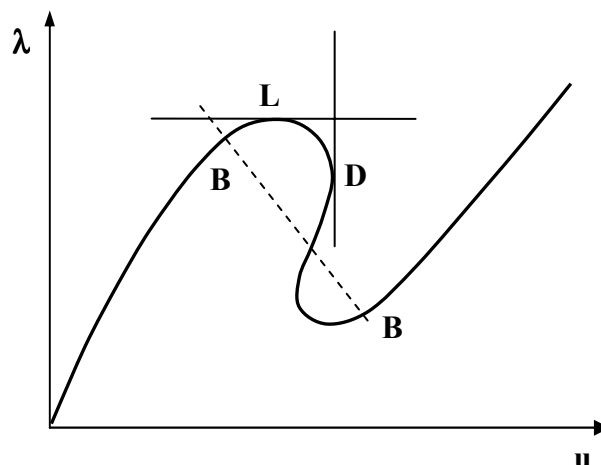
## 6. Řešení

Pružina byla zatěžována vnitřním přetlakem při různých okrajových podmínkách (pevná i posuvná čela) a posuvem čel při konstantním vnitřním tlaku.

Byla řešena pneumatická pružina o průměru 82 mm a délce 120 mm. Bylo využito symetrie uložení a polovina pružiny byla diskretizována 60 elementy. V první fázi výpočtu bylo prováděno zatěžování se zvoleným malým konstantním krokem zatížení a v každém kroku byla prováděna iterace až do dosažení požadované tolerance. Byla použita Newtonova metoda, kdy matice tečné tuhosti i vektory vnitřní a vnější síly byly updatovány nejen na počátku zatěžovacího kroku, ale v každém iteračním cyklu viz Obr.2. Zatěžování bylo ukončeno v okamžiku dosažení limitního zatížení, kdy se matice tečné tuhosti stala singulární.



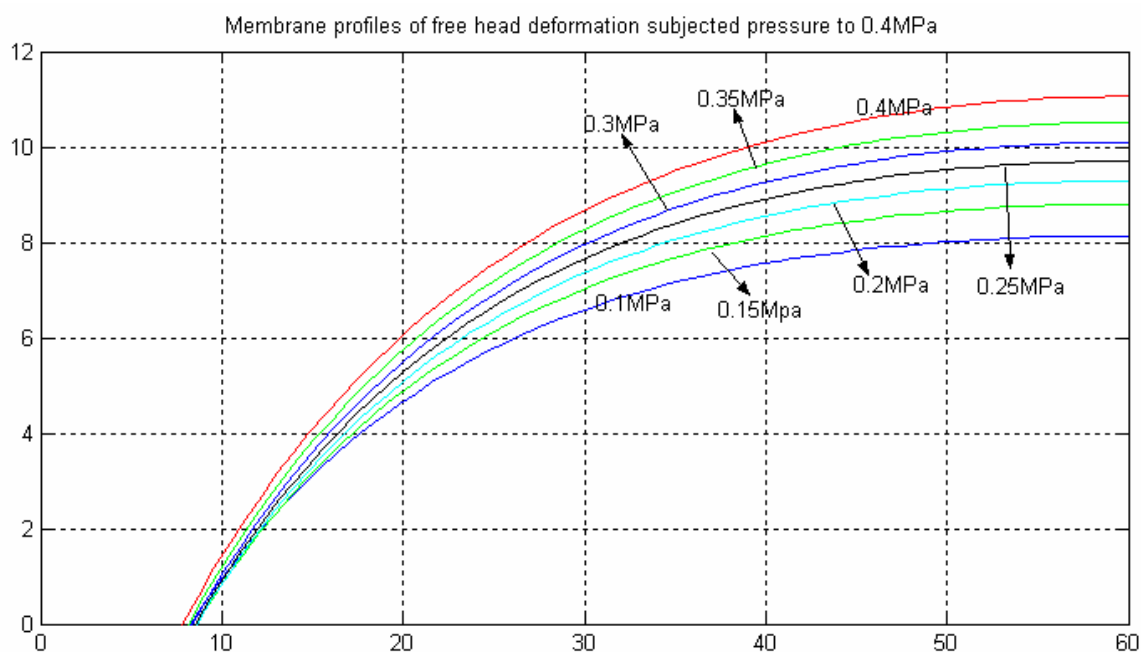
Obr.2



Obr.3

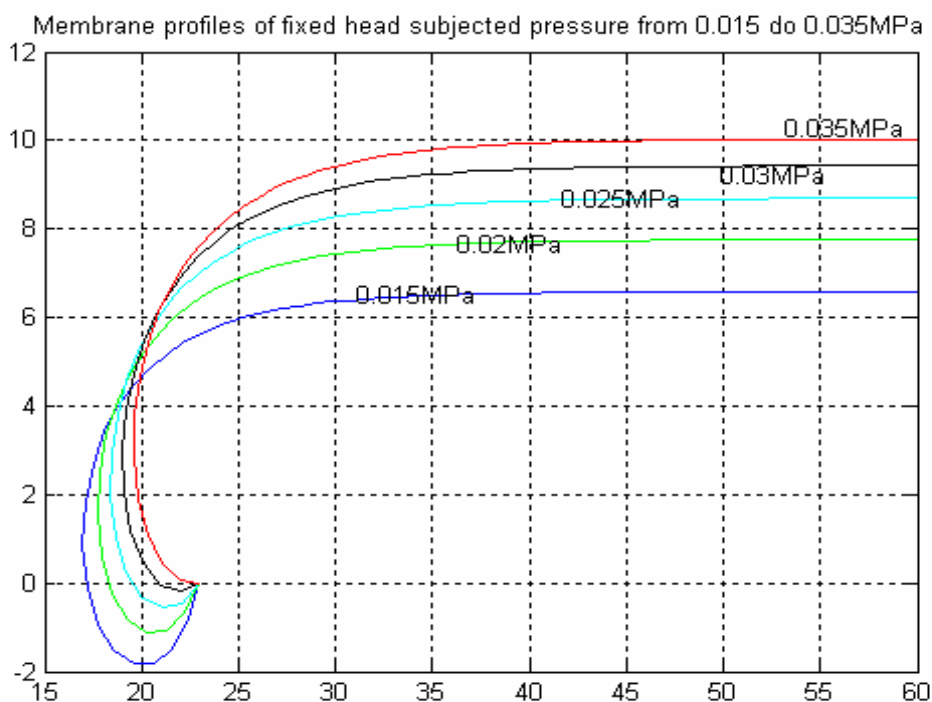
Parametrizace řešení v závislosti na  $\lambda$ , která byla použita, zjednodušuje korekční fázi zatěžovacího kroku výpočtu, avšak neumožňuje získat celou zatěžovací křivku, která může zahrnovat limitní a bifurkační body viz Obr.3. Má-li řešení projít těmito body, je nutné, aby se parametr zatížení  $\lambda$  mohl měnit v průběhu iterace. Existuje celá řada path-following procedur založených na parametrizaci řešení vzhledem k délce oblouku křivky řešení  $s$ , nebo zjednodušených parametrizací vzhledem k délce pseudo-oblouku, kdy se k základním nelineárním rovnicím problému (4.5) přidává další omezující podmínka a rozšířená soustava rovnic je řešena metodou prediktor-korektor. Podrobnosti o těchto metodách lze nalézt v připojené literatuře [17-30].

## 7. Výsledky

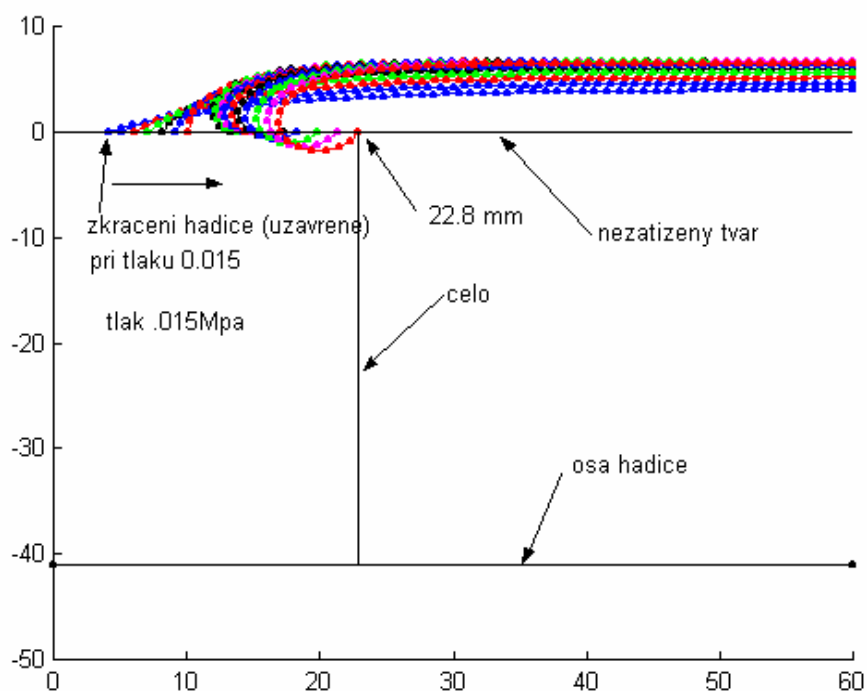


Obr.4 Deformace při posuvných čelech a zvyšujícím se tlaku





Obr. 5 Deformace při zafixovaných čelech a zvyšujícím se tlaku



Obr.6 Deformace pružiny zatěžované posuvem při tlaku 0,015 MPa

Mohou-li se čela pružiny volně posouvat, pak při zvyšování tlaku se nejprve pružina zkracuje v osovém směru jak ukazuje Obr.4. Osově zkrácení závisí na směru kordové výztuže [16]. Zatěžujeme-li pružinu se zasunutými čely (pracovní poloha pružiny), pak při nižších tlacích se hadice vpáčí dovnitř viz. Obr.5 a 6 . To odpovídá experimentálnímu zjištění.

## 8. Závěr

Deformace anizotropní válcové membrány zatížené vnitřním přetlakem při různých okrajových podmínkách byla vyřešena MKP. Zatěžování bylo ukončeno před dosažením limitního bodu. Stanovení kritických bodů a stabilitní analýza budou předmětem další práce.

## Poděkování

Tato práce byla řešena v rámci výzkumného záměru MŠMT CEZ: J11/98:2412100003. Autoři děkují Ministerstvu školství, mládeže a tělovýchovy za finanční podporu tohoto výzkumu.

## Literatura

- [1] Marvalová, B., Nam, T. H., Identification of material parameters and deformation analysis of an inflated cylindrical membrane of composite with rubber matrix reinforced by textile material cords, proc. of 9th int. conference STRUTEX 2002, Liberec, 87-92
- [2] Marvalová, B., Nam, T. H.: Deformation analysis of an inflated cylindrical membrane of composite with rubber matrix reinforced by textile material cords, proc. int. conference Engineering mechanics 2003, Svratka, Czech republic.
- [3] Marvalová, B., Urban, R.: Identification of orthotropic hyperelastic material properties of cord-rubber cylindrical air-spring, proc. of 39<sup>th</sup> int. conference EAN 2001, Tabor, 215-220.
- [4] Marvalová, B., Urban, R.: Experimental analysis of deformation and stress of nonlinear orthotropic hyperelastic membrane, proc. of 40<sup>th</sup> conf. EAN 2002, Praha, 304-309.
- [5] Marvalová, B., Urban, R.: Identification of orthotropic hyperelastic material properties of cord-rubber cylindrical air-spring, proc. of EUROMECH Colloquium 430, Prague, Czech Republic, October, 3-5, 2001
- [6] Bonet, J., Burton, A.J.: A simple orthotropic, transversely isotropic hyperelastic constitutive equation for large strain computations, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 162, 1998, 151-164.
- [7] Holzapfel, G.A., Gasser, T.C., Ogden, R.W.: A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models, J. of Elasticity, Nov. 23, 2000.
- [8] Guo, X.: Large deformation analysis for a cylindrical hyperelastic membrane of rubber-like material under internal pressure, Rubber chemistry and technology, Vol. 74, 2001, 100-115.
- [9] Green, A.E., Adkins, J.E.: Bolšije uprugie deformaci i nelinejnaja mehanika splošnoj stredy, Moskva, mir, 1965.
- [10] Alena Poživilová.: Constitutive modelling of hyperelastic materials using the logarithmic description. PhD. Thesis, 2002, Technical University in Prague. Czech Republic.
- [11] Chevaugeon, N., Verron, E., Peseux, B.: Finite element analysis of nonlinear transversely isotropic hyperelastic membranes for thermoforming applications, Proc. of Europ. Congr. on Comput. Meth. in Appl. Sci.& Engrg. ECCOMAS 2000, Barcelona.

- [12] Verron E., G. Marckmann, An axisymmetric B-spline model for the non-linear inflation of rubberlike membranes, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 190, 2001, 6271- 6289.
- [13] Verron E., G. Marckmann, Inflation of elastomeric circular membranes using network constitutive equations, *Int. Journal of Non-Linear Mechanics* 38, 2003, 1221–1235.
- [14] Shi. J., Moita. G.F., The post-critical analysis of axisymmetric hyper-elastic membranes by finite element method, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 135 (1996) 265-281.
- [15] Kyriacou, S.K., Identification of nonlinear elastic membranes by FEM: Application to aneurysms, PhD Disertation , 1996, University of Maryland  
[www.cbm.v.jhu.edu/~kyriacou/final\\_thesis.ps](http://www.cbm.v.jhu.edu/~kyriacou/final_thesis.ps)
- [16] Holzapfel, G.A., Gasser, T.C., A viscoelastic model for fiber-reinforced composites at finite strains: Continuum basis, computational aspects and applications, *Biomech Preprint Series*, No 2, July 2000.  
<http://www.cis.tugraz.at/biomech/papers.htm>
- [17] Allgower E.L., Georg K., Numerical path following. In P. G. Ciarlet and J. L. Lions, editors, *Handbook of Numerical Analysis*, volume 5, North-Holland (1997) 3-207,  
<http://www.math.colostate.edu/~georg/Preprints/Publications.html>
- [18] Ragon S.A., Gurdal Z., Watson L.T., A comparison of three algorithms tracing nonlinear equilibrium paths of structural systems, *Int. J. of Solid and Structures*, 39(2002), 689-698
- [19] Mallil E., Lahmam H., Damil N., Potier-Ferry M., An iterative process based on homotopy and perturbation techniques, *Comput. Methods in Appl. Mech. And Engrg.*, 190 (2000), 1845-1858
- [20] Huang B.Z., Atluri S.N., A simple method to follow postbuckling paths in finite element analysis, *Computers and Structures*, 57 (1995), No 3, 477-489
- [21] Kouhia R., Mikkola M., Some aspects on efficient path-following, *Computers and Structures*, 72 (1999), 509-524
- [22] Widjaja B.R., Path-following technique based on residual energy suppression for nonlinear finite element analysis, *Computers and Structures*, 66 (1998), No 2-3, 201-209
- [23] Allgower E.L., Georg K., Continuation and path following, *Acta Numerica* (1992), pp.1-64
- [24] Watson L.T., (2000) Probability-one Homotopies in Computational Science. Technical Report TR-00-03, Computer Science, Virginia Tech.,  
<http://eprints.cs.vt.edu:8000/archive/00000559/>
- [25] Billups S.C. and Watson L.T. (2000) A Probability-one Homotopy Algorithm for Non-Smooth Equations and Mixed Complementarity Problems. Technical Report TR-00-05, Computer Science, Virginia Tech.,  
<http://eprints.cs.vt.edu:8000/archive/00000561/>
- [26] Watson L.T, Sosonkina M., Melville R.C., Morgan A.P., Walker H.F., (1996) HOMPAC90: A Suite of FORTRAN 90 Codes for Globally Convergent Homotopy Algorithms. Technical Report ncstrl.vatech\_cs//TR-96-11, Computer Science, Virginia Polytechnic Institute and State University.  
<http://eprints.cs.vt.edu:8000/archive/00000450/>

- [27] Clarke M.J., Hancock G.J., A study of incremental-iterative strategies for nonlinear analyses, *Int. J. for Numerical Methods in Engrg*, 29 (1990) 1365-1391
- [28] Feng Y.T., Peric D., Owen D.R.J., A new criterion for determination of initial loading parameter in arc-length methods, *Computers and Structures*, 58 (1996), No3, 479-485
- [29] Feng Y.T., Peric D., Owen D.R.J., Determination of travel directions in path-following methods, *Mathl. Comput. Modelling*, 21 (1995), No 7, 43-59
- [30] De Souza Neto E.A., Feng Y.T., On the determination of the path direction for arc-length methods in the presence of bifurkations and 'snap-backs', *Comput. Methods in Appl. Mech. And Engrg.*, 179 (1999), 81-89
- [31] Holzapfel G., *Nonlinear solid mechanics*, John Wiley & Sons, England, 2000.