

Numerické metody v mechanice kontinua

I. Numerické metody lineární algebry

Úlohy lineární algebry

Řešení soustav lineárních rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ (1.1)

- Řešení soustavy s regulární čtvercovou maticí \mathbf{A} řádu $n \times n$ pro 1 nebo více pravých stran
- Výpočet inverzní matice \mathbf{A}^{-1}
- Výpočet determinantu
- Řešení soustav n rovnic o m neznámých a singulárních $n \times n$ soustav v nějakém definovaném smyslu (1 řešení + báze nulprostoru, řešení s nejmenší normou, řešení ve smyslu nejmenších čtverců)

Metody řešení soustav lineárních rovnic

1. přímé (finitní)
2. iterační
3. gradientní
4. inverze matic

I.1 Přímé metody řešení soustav lineárních rovnic

Přímé metody řešení spočívají v úpravě matice na trojúhelníkový (případně diagonální) tvar (přímý běh) a potom řešením soustavy s horní trojúhelníkovou maticí \mathbf{U} nebo dolní trojúhelníkovou maticí \mathbf{L} (zpětný běh). Zpětný běh je podstatně rychlejší než přímý.

I.1.1 Řešení soustav s trojúhelníkovou maticí

Rovnice s horní trojúhelníkovou maticí \mathbf{U} se řeší postupným prováděním vzorce ve směru klesajícího indexu k

$$x_k = \frac{1}{u_{kk}} \left(b_k - \sum_{j=k+1}^n u_{kj} x_j \right) \quad (1.2)$$

K výpočtu libovolného x_k je třeba nejvýše n vnitřních cyklů (1 násobení + 1 sčítání), počet operací roste tedy $\sim n^2$ (přesněji $\approx 0.5 n^2$ vnitřních cyklů).

Gaussova a Gauss-Jordanova eliminace

Řeším soustavu rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. V prvním kroku nechť prvek $a_{11} \neq 0$ (lze vždy dosáhnout přehozením rovnic). Prvek a_{11} , použitý k úpravě rovnic 2, ..., n nazveme hlavním prvkem (pivot).

Od i -té rovnice odečteme 1. rovnici násobenou multiplikátorem $m_i^{(1)} = -a_{i1} / a_{11}$. Modifikovaná soustava bude mít v 1. sloupci pod diagonálou samé 0. Úprava prováděná současně s pravou stranou odpovídá násobení rovnice maticí

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21}/a_{11} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Rovnice po první úpravě má tvar $\mathbf{D}_1 \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{D}_1 \mathbf{b}$, označíme $\mathbf{D}_1 \mathbf{A} = \mathbf{A}^{(1)}$ a $\mathbf{D}_1 \mathbf{b} = \mathbf{b}^{(1)}$. Po k-1 úpravách má matice $\mathbf{A}^{(k-1)}$ tvar

$$\mathbf{A}^{(k-1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2,k-1}^{(1)} & a_{2k}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{k-1,k-1}^{(k-2)} & a_{k-1,k}^{(k-2)} & \cdots & a_{k-1,n}^{(k-2)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{k,k}^{(k-1)} & \cdots & a_{k,n}^{(k-1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{k+1,k}^{(k-1)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,k}^{(k-1)} & \cdots & a_{n,n}^{(k-1)} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Zde horní index značí počet úprav daného prvku. Pokud $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$, lze ho zvolit za hlavní prvek, spočítat multiplikátory $m_i^{(k)} = -a_{ik}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}$ pro $i = k+1, \dots, n$ a upravit příslušné rovnice.

V k-tém kroku úpravy používám jako hlavní prvek prvek k - 1-krát upravený (odečítání!) hlavní prvek \rightarrow ztráta přesnosti \Rightarrow výběr hlavního prvku.

Bez výběru hlavního prvku - přímé metody nepoužitelné pro obecné matice!!

Počet operací

Na každou $0 \rightarrow \leq n$ vnitřních cyklů, potřebuji $n(n-1)$ prvků $\rightarrow 0$. Celkový počet vnitřních cyklů $\sim n^3$ (přesněji $\approx 1/3 n^3$), složitost algoritmu je řádu n^3 .

Gauss-Jordanova eliminace

Upravují se všechny prvky mimo diagonálu. Matice se převede na jednotkovou \mathbf{I} . Přímou spočtu inverzní matici \mathbf{A}^{-1} . Vyšší počet operací $\approx n^3$ vnitřních cyklů.

LU metoda

\forall matice \mathbf{A} lze rozložit do tvaru $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$, kde \mathbf{L} , \mathbf{U} jsou levá dolní, resp. pravá horní trojúhelníkové matice. Potom řešení najdu postupným řešením 2 soustav s trojúhelníkovou maticí

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow (\mathbf{L} \mathbf{U}) \mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{L}(\mathbf{U} \mathbf{x}) = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{L} \mathbf{y} = \mathbf{b}, \mathbf{U} \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

LU dekompozice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Násobení matic

$$i \leq j \quad a_{ij} = u_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \quad (1.6)$$

$$i > j \quad a_{ij} = l_{ij} u_{ij} + \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \quad (1.7)$$

Croutův algoritmus - postupný výpočet např. odleva po sloupcích a ve sloupcích odshora. Nejdříve

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}, \quad (1.8)$$

$$i = 1, \dots, j$$

užívá l z předchozích sloupců a u z předchozích řádků, a potom

$$l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \right) / u_{jj}, \quad i = j+1, \dots, n \quad (1.9)$$

užívá l z předchozích sloupců a u z nad diagonální části sloupce.

Sloupcové hledání hlavního prvku (úplně nelze). Prvky a_{ij} použijí jen 1 x, výsledné prvky matic \mathbf{L} a \mathbf{U} se vejdou do 1 matice.

Vlastnosti LU metody:

- Přímá (finitní) metoda, stejně kroků jako přímý běh Gaussovy eliminace
- Hlavní výhoda - při dekompozici nepracuji s pravou stranou rovnice, rychlé výpočty pro postupně získávané pravé strany
- Lze iterativně zpřesnit výsledek

Choleského metoda

Je-li matice \mathbf{A} symetrická a pozitivně definitní, vede jak metoda trojúhelníkového rozkladu, tak základní Gaussova eliminační metoda k cíli bez výběru hlavního prvku. Z důvodu šetření aritmetickým operacemi i paměti je však výhodnější v tomto případě rozložit matice \mathbf{A} na součin

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \quad (1.10)$$

kde \mathbf{L} je dolní trojúhelníková matice, a řešit soustavy

$$\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}, \quad (1.11)$$

$$\mathbf{L}^T\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (1.12)$$

I.2 Iterační metody řešení soustav lineárních rovnic

Jacobiho metoda

Předpokladem metody je, že matice \mathbf{A} má nenulové diagonální prvky $a_{ii} \neq 0$. Složky $k+1$ Jacobiho iterace řešení jsou dány

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{a_{i1}}{a_{ii}} x_1^{(k)} - \dots - \frac{a_{ii-1}}{a_{ii}} x_{i-1}^{(k)} - \frac{a_{ii+1}}{a_{ii}} x_{i+1}^{(k)} - \dots - \frac{a_{in}}{a_{ii}} x_n^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}} \quad (1.13)$$

Matici \mathbf{A} lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{R}, \quad (1.14)$$

kde \mathbf{D} je diagonální, \mathbf{L} je dolní trojúhelníková a \mathbf{R} horní trojúhelníkovou matici (\mathbf{L} a \mathbf{R} mají nulovou diagonálu).

Jacobiho iteraci lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{R})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} \quad (1.15)$$

Věta Pokud je matice \mathbf{A} diagonálně dominantní, pak Jacobiho metoda konverguje. Důkaz Pro diagonálně dominantní matici platí

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1 \quad (1.16)$$

a tedy maximová norma matice $\|\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{R})\| < 1$.

Gauss-Seidelova metoda

Gauss-Seidelova metoda je podobná Jacobiho metodě, ale na rozdíl od ní používá při výpočtu složek vektoru $\mathbf{x}_i^{(k+1)}$ již dříve vypočtené složky $k + 1$ iterace. Iterace je dána vztahem

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{a_{i1}}{a_{ii}} x_1^{(k+1)} - \dots - \frac{a_{ii-1}}{a_{ii}} x_{i-1}^{(k+1)} - \frac{a_{ii+1}}{a_{ii}} x_{i+1}^{(k)} - \dots - \frac{a_{in}}{a_{ii}} x_n^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}} \quad (1.17)$$

Vztah lze zapsat vektorově

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = -(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1} \mathbf{R} \mathbf{x}^{(k)} + (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1} \mathbf{b} \quad (1.18)$$

Věta Postačující podmínky konvergence Gauss-Seidelovy metody jsou:

1. \mathbf{A} je diagonálně dominantní matice.
2. Matice \mathbf{A} je pozitivně definitní (symetrická s kladnými vlastními čísly).

Superrelaxační metoda

Gauss-Seidelovy metoda konverguje pro poměrně širokou třídu matic, ale její konvergence může být velmi pomalá. Označíme-li $\Delta x_i^{(k)} = x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}$ rozdíl mezi iteracemi Gauss-Seidelovou metodou, pak je superrelaxační metoda dána vztahem

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega \Delta x_i^{(k)} \quad (1.19)$$

kde relaxační faktor ω je z intervalu $(0, 2)$, obvykle $\omega \in \langle 1, 2 \rangle$.

Relaxační faktor slouží k urychlení konvergence metody a jeho optimální hodnotu lze vypočítat ze vztahu

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(\mathbf{B})}}, \quad \mathbf{B} = -(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1} \mathbf{R} \quad (1.20)$$

\mathbf{B} je iterační matice Gauss-Seidelovy metody. Gauss-Seidelova metoda je tedy speciálním případem superrelaxační metody s $\omega = 1$.

I.3 Gradientní iterační metody

Metody této skupiny jsou vhodné pro řešení soustavy se symetrickou a pozitivně definitní maticí a využívají fakt, že řešení takové soustavy je jediným minimem formy

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{b}. \quad (1.21)$$

Posloupnost vektorů, která konverguje k přesnému řešení dané soustavy, se v tomto případě dá konstruovat tak, že za předpokladu, že i -tá aproximace $\mathbf{x}^{(i)}$ je už určena, se zvolí směr $\mathbf{v}^{(i)}$, určí se číslo α_i tak, aby vektor $\mathbf{x}^{(i)} + \alpha_i \mathbf{v}^{(i)}$ minimalizoval formu Q na přímce $\mathbf{x}^{(i)} + \alpha_i \mathbf{v}^{(i)}$ a položí se

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{x}^{(i)} + \alpha_i \mathbf{v}^{(i)}. \quad (1.22)$$

Speciální volbou směrů $\mathbf{v}^{(i)}$ v jednotlivých krocích se dostávají konkrétní metody.

Metoda největšího spádu

V této metodě se volí směr $\mathbf{v}^{(i)}$ tak, aby souhlasil se směrem gradientu funkce Q. Příslušné vzorce jsou

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{x}^{(i)} + \frac{\mathbf{r}^{(i)T} \mathbf{r}^{(i)}}{\mathbf{r}^{(i)T} \mathbf{A} \mathbf{r}^{(i)}} \mathbf{r}^{(i)}, \quad (1.23)$$

kde vektor $\mathbf{r}^{(i)}$ se nazývá reziduum i-té aproximace a je dán vztahem

$$\mathbf{r}^{(i)} = \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}^{(i)}. \quad (1.24)$$

Metoda sdružených gradientů

Princip této metody spočívá ve volbě vektorů $\mathbf{v}^{(i)}$ tak, že vzniknou \mathbf{A} -ortogonalizací vektorů reziduí. \mathbf{A} -ortogonalizací (při dané symetrické a pozitivně definitní matici \mathbf{A}) rozumíme postup, pomocí kterého se z posloupnosti lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{u}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}^{(n)}$ sestrojí jiná posloupnost lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(n)}$ tak, že platí $\mathbf{v}^{(i)T} \mathbf{A} \mathbf{v}^{(j)} = 0$ pro $i \neq j$. Tato myšlenka vede na algoritmus popsaný následujícími rovnicemi:

$$\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}^{(1)}, \quad (1.25)$$

$$\alpha_i = \frac{\mathbf{v}^{(i)T} \mathbf{r}^{(i)}}{\mathbf{v}^{(i)T} \mathbf{A} \mathbf{v}^{(i)}}, \quad (1.26)$$

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{x}^{(i)} + \alpha_i \mathbf{v}^{(i)}, \quad (1.27)$$

$$\mathbf{r}^{(i+1)} = \mathbf{r}^{(i)} - \alpha_i \mathbf{A} \mathbf{v}^{(i)}, \quad (1.28)$$

$$\beta_i = \frac{\mathbf{v}^{(i)T} \mathbf{A} \mathbf{r}^{(i+1)}}{\mathbf{v}^{(i)T} \mathbf{A} \mathbf{v}^{(i)}}, \quad (1.29)$$

$$\mathbf{v}^{(i+1)} = \mathbf{r}^{(i+1)} + \beta_i \mathbf{v}^{(i)}, \quad (1.30)$$

Tato metoda má tu pozoruhodnou vlastnost, že za předpokladu, že se nedopouštíme zaokrouhlovacích chyb, vede po n krocích k přesnému řešení.

I.4 Inverze matic

Metody pro řešení soustav lineárních rovnic $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ lze užít ke konstrukci inverzní matice \mathbf{A}^{-1} .

Inverze matice trojúhelníkovým rozkladem

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{L}^{-1}. \quad (1.31)$$

Inverze matice rozdělením na bloky

Nechť matice \mathbf{A} je zapsána ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} & \mathbf{S} \end{bmatrix}, \quad (1.32)$$

kde \mathbf{P} , resp. \mathbf{S} je čtvercová matice řádu p , resp. s . Píšeme-li podobně

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{M} & \mathbf{N} \end{bmatrix}, \quad (1.33)$$

je

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= (\mathbf{P} - \mathbf{Q} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{R})^{-1}, \\ \mathbf{M} &= -\mathbf{S}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{K}, \\ \mathbf{N} &= (\mathbf{S} - \mathbf{R} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q})^{-1}, \\ \mathbf{L} &= -\mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{N}, \end{aligned} \quad (1.34)$$

II. Řešení soustavy nelineárních rovnic

Soustavy nelineárních rovnic

V obecném případě je řešení soustavy nelineárních rovnic velmi obtížné, neexistuje žádná dobrá obecně použitelná metoda.

Je zadána soustava $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$, kterou můžeme rozepsat ve tvaru

$$\begin{aligned}f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\&\dots\dots\dots \\f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0\end{aligned}\tag{2.1}$$

II.1 Prostá iterace

Soustavu (2.1) lze přepsat do tvaru $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$, tedy

$$\begin{aligned}x_1 &= \varphi(x), \\x_2 &= \varphi(x), \\&\dots\dots\dots \\x_n &= \varphi(x).\end{aligned}\tag{2.2}$$

Tato soustava má stejná řešení jako soustava (2.1). Iterační vzorec má tvar

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^{(k)})\tag{2.3}$$

II.2 Newton-Raphsonova metoda pro systémy nelineárních rovnic

Přesné řešení ξ vyjádříme ve tvaru $\xi = \mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$. Hodnotu funkce v bodě ξ vyjádříme pomocí Taylorovy věty

$$\mathbf{f}_i(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) + \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial x_j} \delta x_j}_0 + O(\delta x^2)\tag{2.4}$$

Systém rovnic linearizujeme v bodě $\mathbf{x}^{(k)}$ (k -tý odhad řešení). Máme soustavu n lineárních rovnic o n neznámých

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta x_1^{(k)} \\ \delta x_2^{(k)} \\ \vdots \\ \delta x_n^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}^{(k)}) \\ f_2(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}^{(k)}) \end{pmatrix}\tag{2.5}$$

Iterační vztah je tedy $x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \delta x_i^{(k)}$, kde $i = 1, \dots, n$.

Vektorově $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \left[\mathbf{Jf}(\mathbf{x}^{(k)}) \right]^{-1} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$.

Při dostatečně dobrém odhadu tato metoda vždy konverguje. V případě nutnosti počítáme derivace numericky.

Pozn. Metodu lze modifikovat tak, aby se omezení nebezpečí příliš dlouhých kroků daleko od řešení. V \forall iteračních krocích chceme pokles $\sum_{i=1}^n f_i^2$. Pokud k němu v některém kroku nedojde, místo kroku $\delta x_i^{(k)}$ Newtonovy metody použijeme vztah

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \lambda \cdot \delta x_i^{(k)}, \text{ kde } \lambda \in (0, 1).$$

III. Obyčejné diferenciální rovnice

Obyčejnou diferenciální rovnici N-tého řádu

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(N)}) = g(x) \quad (3.1)$$

převádíme na soustavu N diferenciálních rovnic 1. řádu. Provedeme substituce

$$y' \equiv z_1 \quad y'' \equiv z_2 \quad \dots \quad y^{(N)} \equiv z_{N-1} \quad (3.2)$$

a dostaneme soustavu

$$y' \equiv z_1 \quad z_1' \equiv z_2 \quad \dots \quad z_{N-1}' \equiv z_{N-1} \quad (3.2)$$

$$f(x, y, z_1, \dots, z_{N-1}, z_{N-1}') = g(x) \quad (3.3)$$

Poslední rovnici lze obvykle rozřešit vzhledem k z_{N-1}' , pak ji lze psát ve tvaru

$$z_{N-1}' = \tilde{g}(x, y, z_1, \dots, z_{N-1}) \quad (3.4)$$

K jednoznačnosti řešení musí N rovnic prvního řádu (1 rovnice N-tého řádu) splňovat N podmínek.

Podle zadání podmínek rozlišujeme 2 základní úlohy

- Počáteční problém - \forall podmínky jsou zadány v jednom bodu (mohu přímo sledovat řešení vycházející z tohoto bodu)
- Okrajový problém - \forall podmínky nejsou zadány v jednom bodu - nejčastěji jsou podmínky zadány ve 2 bodech na okrajích, ale mohou být i jiné, např. integrální podmínky

III.1 Úlohy s počátečními podmínkami

III.1.1 Eulerova metoda

Systém diferenciálních rovnic

$$y' = f(x, y)$$

Počáteční podmínky zadávají řešení v bodu x_0 , řešení budeme hledat postupně v bodech x_1, x_2, \dots, x_n . Přibližnou hodnotu řešení v bodě x_{k+1} nalezneme s pomocí 2 členů Taylorova rozvoje v bodě x_k . Označme $h_k = x_{k+1} - x_k$. Pak

$$y_{k+1} = y_k + h_k \cdot f(x, y)$$

Eulerova metoda je metoda 1. řádu (přesnosti). Je tedy málo přesná, vyžaduje velmi krátký krok, a proto se v praxi používá jen zřídka.

Konvergence Eulerovy metody

Nechť je diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$. Nechť v oblasti $D = \{(x, y) \mid x_0 \leq x \leq X, |y - y_0| \leq b\}$, je funkce $f(x, y)$ spojitá a ohraničená $|f(x, y)| < A$. Nechť dále $X - x_0 \leq b/A$ a nechť na množině D $\exists L > 0$ takové, že platí Lipschitzova podmínka

$$|f(x, z) - f(x, y)| \leq L |z - y|$$

Potom pro $h \rightarrow 0$ platí

1. posloupnost $y_n(x)$ konverguje k $\varphi(x)$,
2. $\varphi(x) \in C^1$ je řešení diferenciální rovnice na $x_0 \leq x \leq X$,
3. neexistuje na $x_0 \leq x \leq X$ žádné jiné řešení vyhovující počáteční podmínce.

III.1.2 Runge-Kuttovy metody pro řešení počátečního problému

Princip Runge-Kuttových metod

Jsou to v praxi velmi často používané metody. K nalezení řešení $y_{n+1} = y(x_{n+1})$ se využívá pouze předchozího bodu (x_n, y_n) , nevyužívá bodů s indexem $k < n$. Takové metody nazýváme jednokrokové.

Metody Runge-Kutta jsou založeny na postupném zpřesňování hodnot v bodech mezi x_n a x_{n+1} včetně (obvykle se využívá bodu $x_n + h_n/2$). Výpočetní vzorec Runge-Kuttovy metody má tvar

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi_{RK}(x_n, y_n, h) \quad (3.5)$$

kde

$$\Phi_{RK}(x_n, y_n, h) = p_{r1}k_1(h) + p_{r2}k_2(h) + \dots + p_{rr}k_r(h),$$

a dále

$$\begin{aligned} k_1(h) &= f(x_n, y_n) \\ k_2(h) &= f(x_n + \alpha_2 h, y_n + h\beta_{21}k_1), \end{aligned} \quad (3.6)$$

...

$$k_r(h) = f[x_n + \alpha_r h, y_n + h(\beta_{r1}k_1 + \beta_{r2}k_2 + \dots + \beta_{r,r-1}k_{r-1})]$$

Pokud zvolíme $r = 1$, dostaneme Eulerovu metodu. Pro $r \leq 4$ se řád metody může rovnat r (chyba 1 kroku $\sim h^{r+1}$). Pro konstrukci metody 5. řádu je však zapotřebí alespoň $r = 6$.

Runge-Kuttova metoda 2. řádu

Zvolíme tedy $r = 2$ a můžeme odvodit

$$\begin{aligned} \Phi_{RK}(x_n, y_n, h) &= p_{21}f(x_n, y_n) + p_{22}f(x_n + \alpha_2 h, y_n + h\beta_{21}hf(x_n, y_n)) = \\ &= \Phi_{RK}(x_n, y_n, 0) + \Phi'_{RK}(x_n, y_n, 0)h + O(h^2) \end{aligned}$$

$$= p_{21}f(x_n, y_n) + p_{22}f(x_n + \alpha_2 h, y_n + h\beta_{21}hf(x_n, y_n)) + O(h^2) \quad (3.7)$$

kde $f_x = \partial f / \partial x$, $f_y = \partial f / \partial y$ a Φ' je derivace Φ podle h .

Porovnáme výrazy u nulté a první mocniny h funkce Φ_{RK} s přírůstkem Φ_T ($y(x_n + h) = y(x_n) + h\Phi_T$) vyjádřeným z Taylorova rozvoje

$$\Phi_T = f(x_n, y_n) + \frac{h}{2} \frac{df}{dx} + O(h^2) = f(x_n, y_n) + \frac{h}{2} (f_x + f \cdot f_y) + O(h^2) \quad (3.8)$$

a dostaneme

$$\begin{aligned} h^0 : \quad p_{21} + p_{22} &= 1 \\ hf_x : \quad p_{22}\alpha_2 &= \frac{1}{2} \\ hf_y : \quad p_{22}\beta_{21} &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Tato soustava má nekonečně mnoho řešení, ale logice Runge-Kuttových metod odpovídají následující 2 řešení řešení.

Řešení $\alpha_2 = 1, \beta_{21} = 1$ a $p_{21} = p_{22} = \frac{1}{2}$, dává metodu analogickou lichoběžníkové metodě integrace. Zde je

$$k_2 = f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)) \quad a \quad y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \quad (3.10)$$

Řešení $\alpha_2 = \beta_{21} = \frac{1}{2}$, $p_{21} = 0$ a $p_{22} = 1$ dává metodu analogickou obdélníkové metodě integrace. Zde je

$$k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)) \quad a \quad y_{n+1} = y_n + hk_2 \quad (3.11)$$

Runge-Kuttova metody 3. řádu

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4} h(k_1 + 3k_3) \quad (3.12)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}hk_1) \quad (3.13)$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hk_2)$$

Runge-Kuttova metody 4. řádu

Dvě velmi známé metody 4.řádu jsou

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (3.14)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2) \quad (3.15)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$$

a

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{8}h(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4) \quad (3.16)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{2}{3}h, y_n - \frac{1}{3}hk_1 + hk_2) \quad (3.17)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_1 - hk_2 + hk_3).$$

III.2 Okrajové úlohy (úlohy s okrajovým podmínkami)

Podmínky nejsou zadány v 1. bodu, jsou obvykle zadány ve 2 bodech, i když i jiná formulace podmínky (např. integrální) je možná.

Nechť jsou podmínky zadány ve 2 bodech (rovnice alespoň 2. řádu nebo nejméně 2 rovnice 1. řádu). Máme-li rovnici N-tého řádu, n_1 podmínek je zadáno v bodě a a n_2 podmínek v bodě b, kde $n_1 + n_2 = N$. Nejčastější jsou podmínky s tvarem $y(a) = \alpha_0$, $y'(a) = \alpha_1$ nebo $c_1 y(a) + c_2 y'(a) = \alpha_2$.

Základní metody řešení okrajových úloh jsou

- metoda střelby
- metoda sítí (konečných diferencí)
- variační metody

III.2.1 Metoda střelby

Abychom popsali metodu střelby, uvažujeme soustavu m diferenciálních rovnic

$$y' = f(x, y), \quad x \in \langle a, b \rangle \quad (3.18)$$

s obecnou okrajovou podmínkou

$$r(y(a), y(b)) = 0. \quad (3.19)$$

V algoritmu metody střelby zvolíme nejprve libovolně vektor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)^T$ a řešením soustavu (3.18) a počáteční podmínkou

$$y(a) = \alpha, \quad (3.20)$$

kde vektorová funkce F je definovaná předpisem

$$F(\alpha) = r(\alpha, y(b; \alpha)). \quad (3.21)$$

Označíme-li α^* řešení soustavy (3.20), nalezneme řešení dané okrajové úlohy řešením soustavy diferenciálních rovnic (3.20) s počáteční podmínkou

$$y(a) = \alpha^*, \quad (3.22)$$

Důležitou součástí metody střelby je tedy řešení soustavy nelineárních rovnic (3.20).

III.2.2 Metoda sítí (konečných diferencí)

Metoda sítí je velmi populární a v principu univerzální metoda pro řešení okrajových úloh nejen pro obyčejné diferenciální rovnice, ale zřejmě pro parciální diferenciální rovnice.

Uvažujme diferenciální rovnici

$$y'' = f(x, y, y'), \quad (3.23)$$

v intervalu $\langle a, b \rangle$ s jednoduchými okrajovými podmínkami.

$$y(a) = \gamma_1, \quad y(b) = \gamma_2 \quad (3.24)$$

Předpokládáme-li, že pravá strana rovnice (1), psaná ve tvaru $f(x, y, z)$, splňuje podmínky

$$0 < p_0 \leq f_y(x, y, z) \leq P_0, \quad |f_z(x, y, z)| \leq Q_0 \quad (3.25)$$

(symbol f_y a f_z značí parciální derivace podle příslušných proměnných) a dostatečně velké oblasti proměnných x, y a z , má okrajová úloha (3.23), (3.24) řešení.

Základní myšlenka metody sítí spočívá v tom, že v daném intervalu $\langle a, b \rangle$, v němž hledáme řešení, zvolíme konečnou množinou bodů zvanou síť-nejčastěji to bývá množina ekvidistantních bodů

$$x_k = a + kh, \quad k = 0, \dots, n, \quad (3.26)$$

kde $h = (b - a)/n$ a n je přirozené číslo –a v bodech této množiny splníme danou diferenciální rovnici a eventuálně okrajové podmínky pouze přibližně a to tak, že derivace nahradíme diferenčními podíly (tj. vhodnými lineárními kombinacemi funkčních hodnot hledané funkce v okolních bodech). Zanedbáme-li chyby, kterých se přitom dopustíme, dostaneme pro hodnoty přibližného řešení soustavu konečně mnoha obecně nelineárních rovnic.

Provedeme-li naznačený postup pro okrajovou úlohu (3.23), (3.24), tj. nahradíme-li druhou derivaci funkce y v bodě x_k podílem $[y(x_{k+1}) - 2y(x_k) + y(x_{k-1}))]/h^2$ a první derivaci podílem $[y(x_{k+1}) - y(x_{k-1}))]/(2h)$, které je aproximují s přesností úměrnou h^2 , dostaneme pro přibližné řešení y_k v bodech $x_k, k = 0, \dots, n$, soustavu rovnic

$$\frac{y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}}{h^2} = f\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}\right), \quad k = 1, \dots, n-1, \quad (3.27)$$

$$y_0 = \gamma_1, \quad y_n = \gamma_2.$$

Přibližné řešení přitom aproximuje přesné řešení s přesností h^2 .

Na rozdíl např. od úloh s počátečními podmínkami, soustava (3.27), která představuje konečnědimenzionální náhradu původní úlohy, netvoří ještě algoritmus přibližného řešení této úlohy. Bude tomu tak teprve tehdy, až udáme konkrétní metodu, jak tuto soustavu řešit. Jedna z možností je Newtonova metoda, kterou jsme doporučovali už v případě metody střelby. Vzhledem k speciálnímu tvaru soustavy (3.27) lze také užít jednoduché iterační schéma

$$\begin{aligned} (1 + \omega) y_k^{(i+1)} &= \frac{1}{2} (y_{k-1}^{(i)} + y_{k+1}^{(i)}) + \omega y_k^{(i)} - \frac{1}{2} h^2 f\left(x_k, y_k^{(i)}, \frac{y_{k+1}^{(i)} - y_{k-1}^{(i)}}{2h}\right), \\ k &= 1, \dots, n-1, \\ y_0^{(i+1)} &= \gamma_1, \quad y_n^{(i+1)} = \gamma_2, \end{aligned} \quad (3.28)$$

kde volba číselného parametru ω tak, aby platila nerovnost

$$\omega \geq \frac{1}{2} h^2 P_0, \quad (3.29)$$

zaručuje konvergenci.

IV. Metoda konečných prvků

Metoda konečných prvků (FEM – Finite Element Method), se s výhodou používá pro řešení různých problémů v oblasti mechaniky poddajných těles.

V metodě konečných prvků (MKP) vyplníme objem uvažovaného tělesa mnoha náhradními částmi jednoduchých geometrických tvarů - ty nazýváme prvky – a máme zato, že při vyplňování objemu nevznikly žádné umělé dutiny a že prvky jsou pospojovány jen několika svými hraničními body. Konečným prvkem nazýváme zvolený element (objemu, plochy, délky) definovaný uzly v rozích, popř. i na hranách.

Existují mnohé způsoby jak vysvětlit a odvodit základní vztahy pro metodu konečných prvků. Jeden z nich, zde uvedený, je založen na principu virtuálních prací.

IV.1 Princip virtuálních prací

Princip virtuálních prací hraje v mechanice kontinua důležitou roli. Je též nazýván principem virtuálních posunutí. Duálním principem k principu virtuálních posunutí je princip virtuálních sil [2]. Virtuální práce je fiktivní práce, kterou vykonají staticky přípustné síly a napětí při infinitesimálních kinematiky přístupných posunutí.

Virtuální práce δU , vykonaná vnitřními silami, je rovna práci δW , vykonané vnějšími silami

$$\delta U = \delta W \quad (4.1)$$

Virtuální práci vnějších sil je dána virtuální práci povrchových a objemových sil

$$\delta W = \int_S \delta u_i t_i dS + \int_V \delta u_i f_i dV \quad (4.2)$$

Virtuální posuvy δu_i jsou myšlené, nikoliv skutečné, infinitesimální posuvy udělené každé částici tělesa.

Z výkonu vnitřních sil podle (2.5.76 [2]) se dá odvodit virtuální práce sil ve tvaru

$$\delta U = \int_V \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dV \quad (4.3)$$

Připojíme-li virtuální práci osamělých sil, se kterými se tak často pracuje v inženýrské praxi dostaneme

$$\sum_i \delta q_i Q_i, \quad (4.4)$$

můžeme celkovou bilanci virtuálních sil napsat ve tvaru, v něm se s ní často setkáváme v textech věnovaných metodě konečných prvků (Bathe, 1996)

$$\int_V \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dV = \int_S \delta u_i t_i dS + \int_V \delta u_i f_i dV + \sum_i \delta q_i Q_i \quad (5)$$

Vyjádřeno slovy, virtuální práce vnitřních sil se rovná součtu virtuální práci sil objemových, povrchových a osamělých. Veličina δq_i , odpovídá předepsanému virtuálnímu posunutí v místě působitě síly Q_i .

IV.2 Soustavy nelineárních rovnic v MKP

Se soustavami nelineárních rovnic se v metodě konečných prvků setkáváme často.

IV.2.1 Rovnice rovnováhy tělesa

Statická rovnice rovnováhy tělesa má po diskretizaci tvar

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{R} \quad (4.6)$$

Kde \mathbf{K} je matice tuhosti, \mathbf{u} vektor posunutí a \mathbf{R} je vektor uzlových sil.

Rovnici (4.6) lze přepsat do obecného tvaru

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}) = \mathbf{K}(\mathbf{u})\mathbf{u} - \mathbf{R}(\mathbf{u}) = 0 \quad (4.7)$$

kde $\mathbf{g}(\mathbf{u})$ je gradient potenciální energie, známy též jako reziduální vektor (out-of-balance-force).

IV.2.2 Rovnice stacionárního vedení tepla

Rovnice stacionárního vedení tepla vyjadřuje závislost mezi přiváděným výkonem \mathbf{Q} a vektorem uzlových teplot \mathbf{T} jako

$$\mathbf{K}\mathbf{T} = \mathbf{Q} \quad (4.8)$$

Tepelný tok Q na povrchu tělesa bývá nejčastěji popsán přestupem

$$Q = \alpha(T - T_0), \quad \alpha = \alpha(T) \quad (9)$$

kde T_0 je teplota okolí a α je součinitel přestupu tepla. Protože $\alpha = \alpha(T)$, bude matice tepelné vodivosti \mathbf{K} i pravá strana \mathbf{Q} funkcí teploty tělesa. Podobně jako (4.7) můžeme psát

$$\mathbf{g}(\mathbf{T}) = \mathbf{K}(\mathbf{T})\mathbf{T} - \mathbf{Q}(\mathbf{T}) = 0 \quad (4.10)$$

IV.2.3 Konstitutivní vztahy

Konstitutivní vztahy dávají do souvislosti tenzor napětí $\boldsymbol{\sigma}$ s tenzorem deformace $\boldsymbol{\epsilon}$, např. Pro nelineárně pružný materiál

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}, \text{ kde } \mathbf{D} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\epsilon}), \text{ resp. } \mathbf{D} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (4.11)$$

Můžeme považovat (4.11) za soustavu nelineárních rovnic typu $\mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ nebo, což bude pro další účely výhodnější

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}), \quad \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{D}(\boldsymbol{\sigma}) \boldsymbol{\epsilon}, \quad (4.12)$$

Základním algoritmem řešení soustav nelineárních rovnic na globální úrovni je Newtonova-Raphsonova (NR) metoda.

IV.3 Newtonova-Raphsonova metoda

Problém na globální úrovni můžeme formulovat následujícím způsobem: Hledáme řešení \mathbf{u} , přičemž k dispozici máme jen aproximaci \mathbf{u}_n , tedy

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}_n) \neq 0, \quad \mathbf{g}(\mathbf{u}) = 0. \quad (4.13)$$

$$\text{Označme } \mathbf{g}_n = \mathbf{g}(\mathbf{u}_n), \quad \Delta\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n \quad (4.14)$$

Definujeme Jacobian (tangenciální) matici

$$K_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial u_j}, \text{ kde } g_i = g_i(u_j), \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (4.15)$$

nebo stručně

$$\mathbf{K}_n = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}_n} \quad (4.16)$$

Dále definujeme hessián

$$H_{ijk} = \frac{\partial^2 g_i}{\partial u_j \partial u_k}, \quad \mathbf{H}_n = \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}^2} \bigg|_{\mathbf{u}_n} \quad (4.17)$$

Rozvojem (4.13)₂ do Taylorovo řady v okolí bodu \mathbf{u}_n

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}) = \mathbf{g}_n + \mathbf{K}_n(\mathbf{u} - \mathbf{u}_n) + \frac{1}{2} \mathbf{H}_n(\mathbf{u} - \mathbf{u}_n)^2 + \mathbf{O}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_n)^3 = 0 \quad (4.18)$$

Zanedbáním kvadratické členy a členů vyšších řádů obdržíme výraz pro novou aproximaci \mathbf{u}_{n+1}

$$\mathbf{K}_n(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) = -\mathbf{g}_n \quad (4.19)$$

NR algortimus

- 1) $\mathbf{u}_0 = 0$
- 2) $\mathbf{g}_n = \mathbf{g}(\mathbf{u}_n) = 0 \rightarrow \text{exit}$
- 3) sestavit $\mathbf{K}_n = \partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{u}$ v bodě \mathbf{u}_n
- 4) $\mathbf{K}_n \Delta \mathbf{u}_{n+1} = -\mathbf{g}_n$
- 5) $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u}_{n+1}$

Nová aproximaci \mathbf{u}_{n+1} anuluje jen první dva členy řady (4.18). Zbytek, počítáme kvadratickým členem, představuje chybu aproximace. Dá se tedy očekovat, že v následující iteraci, kdy bude eliminován reziduál $\frac{1}{2} \mathbf{H}_n(\mathbf{u} - \mathbf{u}_n)^2 + \mathbf{O}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_n)^3$, vznikne chyba řádů $\mathbf{O}(\mathbf{u}_{n+2} - \mathbf{u}_{n+1})^2 \approx \mathbf{O}(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n)^4$ atd. Metoda bude zřejmě konvergovat kvadraticky.

IV.4 Kriteria konvergence

Podstatnou součástí algoritmů pro řešení soustav nelineárních rovnic je kontrola, zda se složky reziduálního vektoru blíží nule. K tomuto účelu je např. Vhodné ověřit velikost normy vektoru $\|\mathbf{g}_n\|$

1. Kriterium rovnováhy sil

$$\|\mathbf{g}_n\| < \text{RTOL} \|\mathbf{g}_0\| \quad (4.20)$$

2. V některých případech se zbytková nerovnovážná síla vyskytuje jen v omezené oblasti tělesa, např. V plastické zoně. Tehdy je též vhodné kontrolovat maximální uzlovou sílu

$$\|\mathbf{g}_n\|_\infty < \text{RTOL} \|\mathbf{g}_0\|_\infty, \quad (4.21)$$

$$\|\mathbf{g}_n\|_\infty = \max_i |\mathbf{g}_i^n| \quad (4.22)$$

3. Pokud úlohu řešíme modifikovanou NR metodou, můžeme nastat nepříznivá situace. Kriteria (4.20) a (4.21) jsou sice splněna, avšak aproximace \mathbf{u}_n je stále daleko od skutečného řešení \mathbf{u} . Z tohoto důvodu je vhodné měřit relativní velikost přírůstek v poslední iteraci

$$\|\Delta \mathbf{u}_{n+1}\| < \text{RTOL} \|\mathbf{u}_{n+1}\| \quad (4.23)$$

IV.5 Metoda postupných aproximací

Uvažujme problém typu $\sigma = f(\sigma)$ na locální úrovni. Zmíněná naznačuje možnost zkonstruovat iterační schema

$$\sigma_{n+1} = f(\sigma_n) \quad (4.24)$$

Tento jednoduchý algoritmus se nazývá metodou postupných aproximací a budeme pro něj nadále používat stručné označení SI (successive iterates).

IV.6 Matematická stabilita

Pojem matematické stability se vztahuje k řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Jako modelový problém uvažujme lineární diferenciální rovnici s konstantním koeficientem λ

$$\dot{y} = \lambda y, y_0 = y(0) \quad (4.25)$$

jejímž exaktním řešením je funkce

$$y(t) = y_0 e^{\lambda t} \quad (4.26)$$

Z praktického hlediska nás nezajímá jenom tento čistě teoretický výsledek, ale též to, jak se bude funkce $y(t)$ chovat vzhledem k narušené počáteční podmínce \tilde{y}_0 . Zavedeme-li poruchu ε , potom

$$\tilde{y}_0 = y_0 + \varepsilon, \tilde{y}(t) = y(t) + \varepsilon e^{\lambda t} \quad (4.27)$$

Je zřejmé, že eventuální chyba v y_0 nebude narůstat jen v tom případě, když $\lambda \leq 0$, což je ovšem vlastnost parametru λ , kterou nemůžeme nijak ovlivnit. O systému řekneme, že je matematicky stabilní, když se chyba v počáteční podmínce v čase nezesiluje.

IV.7 Prostorová diskretizace MKP

V metodě konečných prvků se spojitě funkce aproximují pomocí diskretních hodnot přiřazených uzlovým bodům sítě. Celkový počet takových bodů nechť je N . Označme složky vektoru posunutí k -tého uzlu o souřadnicích X_j^k jako

$$u_i^k(t) = u_i(X_j^k, t) \quad (4.28)$$

Uzlová posunutí bývá zvykem zapisovat do sloupcového vektoru

$$\mathbf{q} = [u_1^1, u_2^1, u_3^1, \dots, u_1^N, u_2^N, u_3^N]^T \quad (4.29)$$

Uvnitř elementů se spojitě funkce $u_i(X_j, t), \dot{u}_i(X_j, t)$ nahradí interpolacemi

$$u_i = \mathbf{A}_i \mathbf{q}, \dot{u}_i = \mathbf{A}_i \dot{\mathbf{q}} \quad (4.30)$$

kde \mathbf{A}_i jsou matice (řádkové vektory) tvarových funkcí

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= [a_1(X_j), 0, 0, \dots, a_N(X_j), 0, 0] \\ \mathbf{A}_2 &= [0, a_1(X_j), 0, \dots, 0, a_N(X_j), 0] \\ \mathbf{A}_3 &= [0, 0, a_1(X_j), \dots, 0, 0, a_N(X_j)] \end{aligned} \quad (4.31)$$

Označíme-li derivace tvarových funkcí

$$\mathbf{A}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial X_j}, \quad (4.32)$$

platí následující vztahy

$$\mathbf{u}_{i,j} = \mathbf{A}_{i,j} \mathbf{q}, \quad \dot{\mathbf{u}}_{i,j} = \mathbf{A}_{i,j} \dot{\mathbf{q}} \quad (4.33)$$

Výše uvedeným postupem je provedena prostorová diskretizace přetvoření. Dále je třeba najít diskretní podobu energetického vztahu

$$\dot{W} = \dot{\mathbf{q}}^T \int_{V_0} (\mathbf{A}_{i,j}^T + \mathbf{A}_{k,i}^T \mathbf{u}_{k,j}) \mathbf{S}_{ij} dV, \quad (4.34)$$

$$\dot{W} = \dot{\mathbf{q}}^T \int_{V_0} \mathbf{A}_i^T \mathbf{f}_i dV + \dot{\mathbf{q}}^T \int_S \mathbf{A}_i^T \mathbf{t}_i dS \quad (4.35)$$

Poznamenejme, že v (4.35) jsou tvarové funkce vyjádřeny z hlediska x_j . Z porovnání obou výrazů vyplývá diskretizovaný tvar principu virtuálních výkonů

$$\dot{W} = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{\Psi} = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{R}, \quad (4.36)$$

kde \mathbf{R} jsou ekvivalentní vektory vnitřních sil a zatížení vzhledem k uzlovým bodům

$$\mathbf{\Psi} = \int_{V_0} (\mathbf{A}_{i,j}^T + \mathbf{A}_{k,i}^T \mathbf{u}_{k,j}) \mathbf{S}_{ij} dV, \quad (4.37)$$

$$\mathbf{R} = \int_{V_0} \mathbf{A}_i^T \mathbf{f}_i dV + \int_S \mathbf{A}_i^T \mathbf{t}_i dS \quad (4.38)$$

Princip (4.36) musí platit pro libovolný vektor $\dot{\mathbf{q}}$ odkud

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{R}. \quad (4.39)$$

IV.8 Tangenciální operátory

Některé metody řešení soustav nelineárních algebraických rovnic (ale ne všechny) vyžadují sestavení tangenciální matice. Derivováním (4.37) podle času obdržíme

$$\frac{d\mathbf{\Psi}}{dt} = \int_{V_0} (\mathbf{A}_{i,j}^T + \mathbf{A}_{k,i}^T \mathbf{u}_{k,j}) \dot{\mathbf{S}}_{ij} dV + \int_{V_0} \mathbf{A}_{k,i}^T \dot{\mathbf{u}}_{k,j} \mathbf{S}_{ij} dV \quad (4.40)$$

Dále můžeme odvodit

$$\frac{d\mathbf{\Psi}}{dt} = \mathbf{K}^T \dot{\mathbf{q}}, \quad (4.41)$$

kde \mathbf{K}^T je symetrická tangenciální matice

$$\mathbf{K}^T = \mathbf{K}^0 + \mathbf{K}^\sigma + \mathbf{K}^L, \quad (4.42)$$

$$\mathbf{K}^L = \mathbf{K}^{L1} + (\mathbf{K}^{L1})^T + \mathbf{K}^{L2}, \quad (4.43)$$

Sestávají z matice počáteční tuhosti \mathbf{K}^0 , z geometrické matice (matice počátečního napětí) \mathbf{K}^σ a z matice velkých posunutí \mathbf{K}^L .

$$\mathbf{K}^0 = \int_{V_0} \mathbf{A}_{i,j}^T \mathbf{D}_{ijkl} \mathbf{A}_{k,l} dV, \quad (4.44)$$

$$\mathbf{K}^\sigma = \int_{V_0} \mathbf{A}_{k,i}^T \mathbf{S}_{ij} \mathbf{A}_{k,j} dV, \quad (4.45)$$

$$\mathbf{K}^{L1} = \int_{V_0} \mathbf{A}_{i,j}^T \mathbf{D}_{ijkl} \mathbf{A}_{n,k} \mathbf{u}_{n,l} dV, \quad (4.46)$$

$$\mathbf{K}^{L2} = \int_{V_0} \mathbf{u}_{m,i} \mathbf{A}_{m,j}^T \mathbf{D}_{ijkl} \mathbf{A}_{n,k} \mathbf{u}_{n,l} dV. \quad (4.47)$$

Matice \mathbf{K}^0 je dobře známa z lineární pružnosti. Tato matice nezávisí na přetvoření tělesa, a proto je možno ji sestavit a faktorizovat ještě před zahájením nelineárního výpočtu.

Geometrická matice \mathbf{K}^σ závisí výhradně na S_{ij} a nikdy se nedá v tangenciálním vztahu a priori zanedbat. V maticích \mathbf{K}^{L1} , \mathbf{K}^{L2} vystupují derivace posunutí $u_{i,j}$, které je nutno vypočítat z interpolace (4.33) v závislosti na \mathbf{q} .

IV.9 Velké soustavy lineárních algebraických rovnic

Mnoho problémů v technické praxi vede na řešení soustavy n lineárních algebraických rovnic o n neznámých $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Matice soustavy \mathbf{A} , je-li odvozena z deformační varianty metody konečných prvků (MKP), má význam globální matice tuhosti, \mathbf{b} představuje vektor vnějších sil a vektor \mathbf{x} obsahuje hledané řešení, vyjádřené v zobecněných posuvech. Matice \mathbf{A} obvykle regulární, symetrická, pozitivně definitní a řídká.

IV.9.1 Přímé metody řešení algebraických rovnic

Tyto metody se vyznačují tím, že zanedbáme-li vliv zaokrouhlovacích chyb, je možné dosáhnout přesného řešení po konečném počtu algebraických operací.

IV.9.2 Gaussova eliminace

Soustava rovnic je obvykle řešena nějakou variantou Gaussovy eliminace. Metoda Gaussovy je založena na postupné eliminaci neznámých. Násobky první rovnice se odcítají od zbývajících rovnic tak, že první neznámá vypadne. Tak získáme menší soustavu $(n-1)$ rovnic o $(n-1)$ neznámých. Tímto způsobem pokračujeme, dokud nerůstane poslední rovnice. Poslední rovnice obsahuje pouze jednu neznámou, jejíž hodnotu je možno snadno určit. Dosadíme hodnotu poslední neznámé do předchozí rovnice umožňující vypočítat hodnotu předposlední neznámé. Tímto postupem pokračujeme nahoru, dokud všechny neznámé nejsou vypočítány.

IV.9.3 Gaussova-Jordanova eliminační metoda

Tato metoda řešení soustav algebraických rovnic se na první pohled zdá být velmi účinná, eliminace rovnic je totiž koncipována tak, že postup nevede na trojúhelníkovou matice nýbrž na diagonální.

IV.9.4 Choleského rozklad

Tato metoda je založena na rozklad původní matice \mathbf{A} v součin dolní trojúhelníkové a horní trojúhelníkové matice, tj $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{LU}$. Je-li matice symetrická, postup se zjednoduší, rozklad potom je $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{R}^T \mathbf{R}$, kde \mathbf{R} je horní trojúhelníková matice. Tedy místo $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ řešíme $\mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Označíme $\mathbf{R} \mathbf{x} = \mathbf{y}$ obdržíme dvě rovnice $\mathbf{R}^T \mathbf{y} = \mathbf{b}$ a $\mathbf{R} \mathbf{x} = \mathbf{y}$, z kterých je možno operací je shruba stejný jako pro Gaussovu eliminace.

IV.9.5 Řešení soustavy algebraických rovnic pomocí inverze matice soustavy

Existuje mnoho metod, které vedou k výpočtu inverze matice. Obvykle se vychází z některého typu eliminace.

IV.9.6 Iterační metody řešení algebraických rovnic – stacionární metody.

Tato metoda řešení $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ jsou založeny na myšlence řešení ekvivalentního systému rovnic $\mathbf{Mx} = (\mathbf{M} - \mathbf{A})\mathbf{x} + \mathbf{b}$. Ekvivalentní systém je řešen iteračně postupnými substitucemi využitím následujícího schématu $\mathbf{M}^{(k+1)}\mathbf{x} = (\mathbf{M} - \mathbf{A})^{(k)}\mathbf{x} + \mathbf{b}$. Existuje mnoho způsobů volit matici \mathbf{M} . Volba $\mathbf{M} = \mathbf{A}$ ihned konverguje a vede na přímé metody. Jiná jednoduchá volba $\mathbf{M} = \mathbf{I}$ vede na metodou někdy zvanou metoda postupných substitucí nebo metoda jednoduché iterace. Podrobněji zde budou popsány tři volby často užívané při iteračních výpočtech. Vytvoříme-li \mathbf{M} jako diagonální část \mathbf{A} , potom máme tzv. **Jakobiho metodou**. Volba \mathbf{M} jako trojúhelníkové části \mathbf{A} dává tzv. **Gaussovu-Seidelovu** metodu a volba \mathbf{M} jako kombinace dvou předchozích voleb vede na metodou postupné relaxace.

Jakobiho metoda

Metoda je založena na vyšetření každé z n rovnic, za předpokladu, že ostatní prvky matice soustavy jsou neměnné, tj. $x_j = \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j \right) / a_{ii}$. Je známo, že regulární matici je možné vždy přeskupit tak, že nemá žádné nulové diagonální prvky. Iterační schéma je dáno vztahem
$$^{(k)}x_j = \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} ^{(k-1)}x_j \right) / a_{ii}.$$

Gaussova-Seidelova metoda

Gaussova-Seidelova metoda je podrobná Jacobiho metodě, nicméně používá aktualizované hodnoty neznámých, jakmile jsou k dispozici.

IV.9.7 Iterační metody řešení algebraických rovnic – nestacionární metody.

Tyto metody jsou charakterizovány skutečností, že výpočty jsou značně ovlivněny informací závislejší na hodnotách v aktuálním iteračním kroku.

Metoda konjugovaných gradientů

Metoda konjugovaných gradientů generuje posloupnost konjugovaných vektorů, které jsou rezidui iterací. Jsou konstruovány tak, že minimalizují kvadratický potenciál, což je ekvivalentní řešení systému algebraických rovnic.

Kvadratický potenciál energie $\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Ax} - \mathbf{x}^T \mathbf{b}$

IV.10 Velké soustavy nelineárních algebraických rovnic

Základním algoritmem řešení velkých soustav algebraických rovnic

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}) = 0 \tag{4.48}$$

je Newtonova-Raphsonova metoda. Tato metoda je v klasickém provedení dosti nespolehlivá a navíc je jen málo efektivní, protože je třeba opakovaně faktorizovat tangenciální matici \mathbf{K}_n .

IV.10.1 Modifikovaná Newtonova-Raphsonova metoda (MNR)

Jednoduchou možností je náhrada matice \mathbf{K}_n maticí \mathbf{K}_0 , kde \mathbf{K}_0 je tangenciální matice vypočtená v bodě $\mathbf{u}_0 = 0$. Rekurence algoritmu, nazývaného též metodou počáteční tuhosti (initial stiffness) nebo metodou počáteční napětí (initial stress)

$$\mathbf{K}_0(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) = -\mathbf{g}_n \tag{4.49}$$

A matice \mathbf{K}_0 se faktorizuje jen jednou, před zahájením výpočtu.

IV.10.2 Lineární akcelerace (line search)

Předtím než přičteme přírůstek řešení $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u}_n$, můžeme se pokusit tento přírůstek vylepšit (prodloužit nebo zkrátit) vynásobením vhodným číslem β . Přepíšeme rekurenci NR metody z odstavce 3 jako

$$\mathbf{K}_n \mathbf{d}_{n+1} = -\mathbf{g}_n, \quad (4.50)$$

Nebo pro MNR metodou

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{d}_{n+1} = -\mathbf{g}_n, \quad (4.50)$$

Kde \mathbf{d}_{n+1} je směr, ve kterém budeme hledat opravu řešení

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \beta \mathbf{d}_{n+1}, \quad (4.51)$$

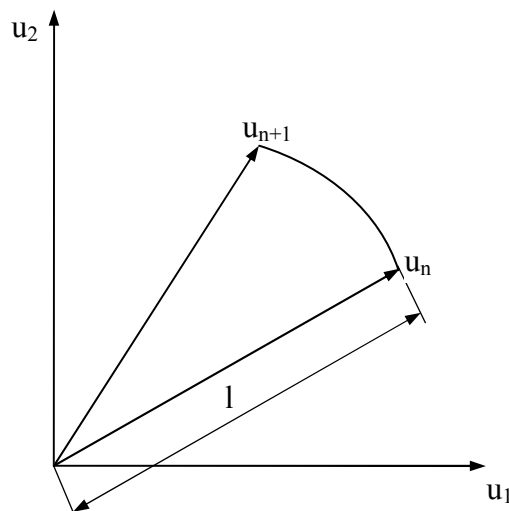
Nelze očekávat, že najdeme β takové, že $\mathbf{g}(\mathbf{u}_{n+1}) = 0$, můžeme se však pokusit parametr β nějakým způsobem optimalizovat. Nejčastěji se anulují průmět reziduálu \mathbf{g}_{n+1} do směru \mathbf{d}_{n+1} , tedy

$$G(\beta) = \mathbf{d}_{n+1}^T \mathbf{g}(\mathbf{u}_n + \beta \mathbf{d}_{n+1}) = 0 \quad (4.52)$$

V podstatě jde o Galerkinovu metodu s jediným bázovým vektorem \mathbf{d}_{n+1} . Výraz (4.52) představuje nelineární algebraickou rovnici o jedné neznámé β .

IV.10.3 Metoda konstantní délky oblouku

V průběhu iterací je někdy výhodné změnit okamžitou velikost pravé strany. Týká se to např. Řešení stabilitních problémů typu „snap-through“. K tomuto účelu slouží *metoda konstantní délky oblouku*, v níž se pravá strana \mathbf{R} průběžně násobí multiplikátorem λ tak, aby norma aproximace řešení $\|\mathbf{u}_n\|$ zůstávala konstantní. Principem algoritmu je nalezení správného směru \mathbf{u} , ve kterém bude splněna rovnost $\mathbf{g}(\mathbf{u}) = 0$ a velikost pravé strany \mathbf{R} bude odpovídat předepsané délce vektoru $\|\mathbf{u}\|$.



Obr.

Rozpišme nejdříve reziduál \mathbf{g}_n jako

$$\mathbf{g}_n = \mathbf{\Psi}_n - \mathbf{R}_0, \quad (4.53)$$

kde \mathbf{R}_0 je předepsaný konstantní vektor a $\mathbf{\Psi}_n = \mathbf{\Psi}(\mathbf{u}_n)$. V mechanice poddajných těles představuje \mathbf{R}_0 silové zatížení a $\mathbf{\Psi}$ je vektor ekvivalentních vnitřních sil

$$\mathbf{\Psi}_n = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_n d\Omega, \quad (4.54)$$

Rekurence modifikované Newtonovy-Raphsonovy metody zní

$$\mathbf{K}_0 \Delta \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{\Psi}_n, \quad (4.55)$$

S aktualizací $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u}_{n+1}$. Dále postupujeme tak, že ve shodě s obr. Uvalíme algebraickou podmínku vazby na délku vektoru \mathbf{u}_{n+1} .

$$\|\mathbf{u}_{n+1}\| = 1, \quad (4.56)$$

a modifikujeme pravou stranu (4.55)

$$\mathbf{K}_0 \Delta \mathbf{u}_{n+1} = \lambda_{n+1} \mathbf{R}_0 - \Psi_n, \quad (4.57)$$

Parametr λ_{n+1} je nutno stanovit tak, aby platilo (4.56). Je výhodné rozložit λ_{n+1} na hodnotu λ_n známou z poslední iterace a její přírůstek β , neboli

$$\mathbf{R}_{n+1} = \lambda_{n+1} \mathbf{R}_0 = (\lambda_n + \beta) \mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_n + \beta \mathbf{R}_0. \quad (4.58)$$

Dosazením (4.58) do (4.57) dostaneme

$$\mathbf{K}_0 \Delta \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{R}_n - \Psi_n + \beta \mathbf{R}_0. \quad (4.59)$$

Tato rovnice je lineární s konstantními \mathbf{K}_0 . Označme

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{u}_0 = \mathbf{R}_0, \quad \mathbf{K}_0 \mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{R}_n - \Psi_n, \quad (4.60)$$

Vektor \mathbf{u}_0 je nutné určit jen jednou, před zahájením vlastního výpočtu. Doatáváme tak standardní rekurenci MNR metody s korekcí $\beta \mathbf{u}_0$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \mathbf{d}_{n+1} + \beta \mathbf{u}_0. \quad (4.61)$$

Parametr β určíme z podmínky (4.56). Dosazením na \mathbf{u}_{n+1} z (4.61) obdržíme kvadratickou rovnici

$$A\beta^2 + B\beta + C = 0 \quad (4.62)$$

s koeficienty

$$\begin{aligned} A &= \|\mathbf{u}_0\|^2 \\ B &= 2(\mathbf{u}_n + \mathbf{d}_{n+1})^T \mathbf{u}_0 \\ C &= \|\mathbf{u}_n + \mathbf{d}_{n+1}\|^2 - 1^2 \end{aligned} \quad (4.63)$$

Řešením (4.62) získáme kořeny β_1 , β_2 a dále můžeme vypočítat hodnotu $\beta_3 = -C/B$. Jak parametr β vezmeme ten z kořenů β_1 , β_2 , pro který bude platit

$$\mathbf{u}_{n+1}^T \mathbf{u}_n > 0. \quad (4.64)$$

Pokud obě řešení β_1 , β_2 vyhovují (4.64), zvolíme kořen, jehož vzdálenost od čísla β_3 je minimální. V případě, že (4.62) dává řešení s imaginární složkou, nezbyvá nic jiného než zmenšit velikost zatížení \mathbf{R}_0 .

IV.11 Integrace elasticko-plastických konstitutivních vztahů

Problematika integrace algebro-diferenciálních rovnic je dosti komplikovaná, a proto dříve než přistoupíme k obecné formulaci, vysvětlíme principy nejznámějších metod na případě J_2 -teorie.

IV.11.1 Maticový zápis J2-teorie

Konstitutivní rovnice pro izotropní, elastický materiál vyjádříme jako

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4.65)$$

kde \mathbf{D} je matice elastických konstant

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

$\boldsymbol{\sigma}$ je sloupcový vektor napětí

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}]^T \quad (4.67)$$

$\boldsymbol{\varepsilon}$ je sloupcový vektor deformace

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv [\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}]^T \quad (4.68)$$

přičemž veličiny γ_{ij} představují zkosity, tj. dvojnásobky poměrných deformací. Pro další účely definujeme střední napětí

$$\sigma_m = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3 \quad (4.69)$$

a deviátor napětí

$$\begin{aligned} s_{xx} &= \sigma_{xx} - \sigma_m, & s_{xy} &= \sigma_{xy}, \\ s_{yy} &= \sigma_{yy} - \sigma_m, & s_{yz} &= \sigma_{yz}, \\ s_{zz} &= \sigma_{zz} - \sigma_m, & s_{zx} &= \sigma_{zx}. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Uvažujme druhý invariant deviátoru

$$J_2 = \frac{1}{2} (s_{xx}^2 + s_{yy}^2 + s_{zz}^2 + 2s_{xy}^2 + 2s_{yz}^2 + 2s_{zx}^2) \quad (4.71)$$

nebo v maticovém tvaru

$$J_2 = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{M} \mathbf{s}, \quad \mathbf{M} = \text{diag}[1, 1, 1, 2, 2, 2] \quad (4.72)$$

Podle (4.70) je stopa deviátoru nulová, $\text{Tr}(\mathbf{s}) = s_{xx} + s_{yy} + s_{zz} = 0$, takže platí

$$\mathbf{s}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{s}^T \mathbf{M} \mathbf{s} \quad (4.73)$$

$$\text{a také} \quad \mathbf{D}\mathbf{M}\mathbf{s} = 2\mathbf{G}\mathbf{s}, \quad (4.74)$$

kde $2G = E/(1+\nu)$ je dvojnásobek modulu pružnosti ve smyku.

Jako modelový příklad budeme uvažovat J_2 -teorii ideálně plastického materiálu, ve kterém definujeme von Missovo efektivní napětí

$$\sigma_{\text{ef}}(\mathbf{s}) = \sqrt{3J_2}. \quad (4.75)$$

Efektivní napětí je pro ideálně plastický materiál vázáno jednostrannou podmínkou

$$\sigma_{\text{ef}} \leq \sigma_Y, \quad (4.76)$$

ve kterém konstanta σ_Y představuje mez kluzu. Aby bylo možno zajistit platnost (4.76) pro libovolnou předepsanou deformaci $\boldsymbol{\epsilon}$, předpokládáme, že celková deformace $\boldsymbol{\epsilon}$ obsahuje plastickou složku $\boldsymbol{\epsilon}^p$, která nevstupuje do výpočtu napětí

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p). \quad 4. (77)$$

Podle hypotézy Prandtla a Reusse je časová změna plastické deformace

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \lambda \mathbf{M}\mathbf{s}, \quad \lambda \geq 0. \quad (4.78)$$

Derivováním (4.77) a dosazením z (4.78), (4.74) dostaneme

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - 2G\lambda \mathbf{s}, \quad \lambda \geq 0. \quad (4.79)$$

Nakonec obdržíme alternativní popis problému

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_{\text{ep}} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad (4.80)$$

kde \mathbf{D}_{ep} je elasticko-plastická tangenciální matice

$$\mathbf{D}_{\text{ep}} = \mathbf{D} - \frac{3G}{\sigma_Y^2} \mathbf{s}\mathbf{s}^T. \quad (4.81)$$

Protože \mathbf{D}_{ep} je nelineární funkcí složek napětí, je (4.80) soustava šesti nelineárních diferenciálních rovnic.

Pro integraci konstitutivních rovnic používáme některé metody

- Metoda prediktor-korektor
- Sečná metoda
- Metoda radial return

IV.11.2 Zobecněné metody

Konstitutivní modely založené na předpokladu existence plochy plasticity mohou být podle (Ortiz, 1985) [2] zapsány jako

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^p, \quad (4.82)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad (4.83)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \lambda \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}), \quad (4.84)$$

$$\dot{\mathbf{h}} = \lambda \mathbf{q}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}), \quad (4.86)$$

kde \mathbf{h} je vektor vnitřních stavových veličin, a dále uvažujeme podmínkou vazby v kuhnově-Tuckerově tvaru

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}) \leq 0, \quad (4.87)$$

$$\lambda \geq 0, \quad (4.88)$$

$$F\lambda = 0. \quad (89)$$

J₂-teorie elastického-ideálně plastického materiálu je obsažena jako speciální případ, kdy $F = \sigma_{ef} - \sigma_Y$, $\mathbf{h} = \{0\}$, $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{M}\mathbf{s}$.

Literatura

- [1] M. Okrouhlík. Implementation of Nonlinear Continuum Mechanics in Finite Element Codes. Institute of Thermomechanics, Prague 1995.
- [2] M. Okrouhlík. Mechanika poddajných těles, numerická matematika a superpočítače. Ústav termomechaniky, Praha 1997.
- [3] Karel Rektorys a spolupracovníci. Přehled užití matematiky. Praha 1995.
- [4] E. Vitásek. Numerické metody. Praha 1987.