

Mechanika kontinua poddajných těles

I. ÚVOD

Mechanika kontinua je založena na objevných pracích Newtona, Eulera, Lagrangea a především Cauchyho. Aplikace počítačů umožnila řešit složité nelineární úlohy mechaniky, které zace zpětně vyžadovaly hlubší teoretické základy. Proto se v současné době pokračuje v intenzivním bádání – hledají se vztahy a závislosti použitelné při formulaci úloh s vysokými rychlostmi zatěžování, vazby mezi různými typy deformací a odpovídajícím různě definovanými napětími a pod.

Mechanika kontinua je část mechaniky, která se zabývá pohybem, deformací a napětí v těles a tekutinách. Pojem „kontinuum“ je třeba chápat jako jeden z možných modelů hmoty a uvědomovat si přitom, že „kontinuita“ spojitost prostředí je vlastně iluze, která je v rozporu se skutečnou korpuskulární strukturou okolního světa. Předpokládá, že sledování prostředí je spojitě. Má se zato, že všechny sledování vlastnosti materiálů obsaženého uvnitř vytčeného infinitesimálního elementu jsou popsány spojitými funkcemi prostorových souřadnic a navíc jsou stejné jako ty, které se dají experimentálně zjistit u vzorků konečných velikostí.

Model kontinua, přijatý pro řešení určité třídy úloh, bude dávat „správně“ výsledky pouze tehdy. Bude-li použit v rámci oboru své platnosti. To však nelze matematicky dokázat. Jediným kritériem je experiment. Pokud výsledky experimentu nejsou v rozporu s tím, co model předpovídá, považuje se model za dobrý.

Matematický popis nelineárních dějů je složitý a pro úsporný a efektivní zápis vyžaduje použití tenzorového vyjádření vztahů. Proto jsou dále uvedeny stručné základy tenzorového a maticového počtu.

II. NELINEÁRNÍ MECHANIKY KONTINUA

2.1 Skalár, vektor a tenzor [1, 3]

Skaláry (tenzor nultého řádu) jsou jednoznačně určeny svými hodnotami a nezávisí na souřadném systému. Příkladem sklárů je teplota, hmotnost, hustota, apod.

Vektory (tenzor prvního řádu) jsou určeny velikostí a směrem. Označují se polotučnými stojatými písmeny, nebo kuzinou ve složených závorkách ($\mathbf{v}, \vec{v}, v_i, \{v\}$). Symbolem $\{v\}$ označujeme sloupcový vektor.

Operace s vektory

Skalární součin je definován vztahem

$$s = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i = \{\mathbf{a}\}^T \{\mathbf{b}\} = \{\mathbf{a}\} \{\mathbf{b}\}^T = \{\mathbf{b}\}^T \{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{b}\} \{\mathbf{a}\}^T \quad (2.1)$$

Vektorový součin je definován vztahem

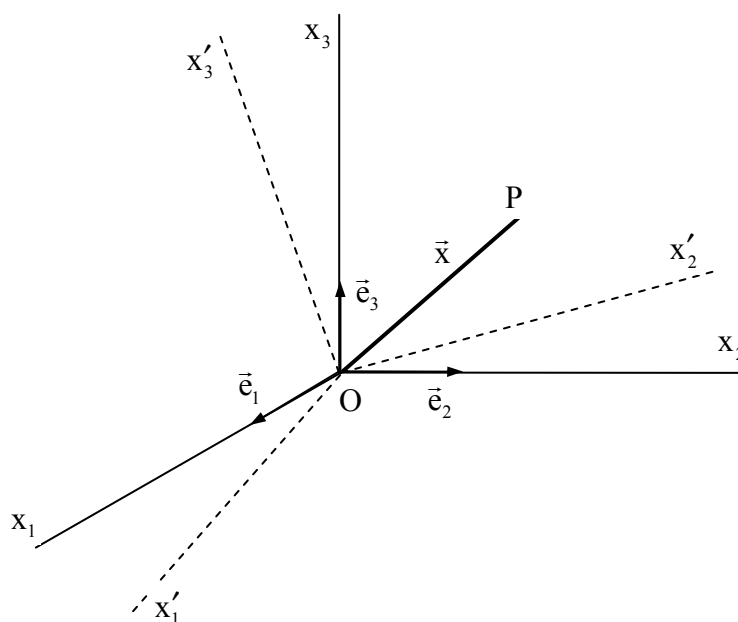
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}; \quad c_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k \quad (2.2)$$

Tenzory jsou veličiny definované transformačními vlastnostmi.

Kartézský tenzor 1.řádu je vektor se složkami

$$a'_i = \alpha_{ij} a_j \quad ; \quad a_i = \alpha_{pi} a'_p \quad (2.3)$$

kde $\alpha_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \cos(x'_i, x_j)$, $i, j = 1, 2, 3$ jsou směrové kosiny. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ jsou jednotkové vektory souřadného systému x_1, x_2, x_3 (obr.1).



Obr. 1

Kartézský tenzor 2.řádu je určen se složkami

$$\begin{aligned} a'_{ij} &= \alpha_{ip} \alpha_{jq} a_{pq}, \\ a_{ij} &= \alpha_{pi} \alpha_{qj} a'_{pq} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Symetrický a antisymetrický tenzor $\begin{cases} [a_{ij}]^T = [a_{ij}] \\ [a_{ij}]^T = -[a_{ij}] \end{cases}$

Operace s tenzory

Násobení tenzorů

$$c_{ij} = a_{ik} b_{kj} \quad \mathbf{C} = \mathbf{A} \mathbf{B} \quad [\mathbf{C}] = [\mathbf{A}][\mathbf{B}] \quad (2.5)$$

Skalární součin tenzorů

$s = \mathbf{A} : \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B})$, kde operátor tr značí stopu. Tato operace je definována vztahem

$$s = a_{ij} b_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij} \quad (2.6)$$

Invarianty tenzorů

V mechanice se při transformaci souřadnic a určování hlavních hodnot tenzorů (jen diagonální prvky) setkáváme s koeficienty kubické rovnice pro hlavní hodnoty tenzoru, které jsou invariantami. Jsou tři

$$\begin{aligned} I_1 &= a_{ii}, \\ I_2 &= \frac{1}{2} [a_{ii}a_{kk} - a_{ik}a_{ki}], \\ I_3 &= \frac{1}{6} [a_{ii}a_{kk}a_{jj} + 2a_{ik}a_{km}a_{mi} - 3a_{ik}a_{ki}a_{jj}], \end{aligned} \quad (2.7)$$

Invariant I_3 lze vyjádřit jako determinant tenzoru $[a_{ij}]$, $I_3 = \det[a_{ij}]$

Derivátor tenzoru je definován

$$a_{ij}^d = a_{ij} - \frac{1}{3} a_{kk} \delta_{ij} \quad (2.8)$$

Druhý člen pravé strany představuje prvky tzv. „kulového“ tenzoru.

Hlavní hodnoty tenzorů

Rovnice

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0 \quad (2.9)$$

určuje hlavní hodnoty tenzoru $[a_{ij}]$.

Je-li $[a_{ij}]$ symetrický tenzor, jsou všechny tři invarianty a hlavní hodnoty tenzoru reálná čísla. Prostřednictvím hlavních hodnot $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ se invarianty vyjadřují závislostmi:

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ I_2 &= \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1, \\ I_3 &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.2 Kinematika přetvoření

Kinematika studuje pohyb těles, aniž se zabývá silami, které tento pohyb způsobují. Nejčastěji se používá Lagrangeův popis pohybu [9]. To znamená závislost

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \quad (2.11)$$

Na process deformace tělesa, popsany funkcí (2.11), se můžeme též dívat jako na transformační předpis pro $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{x}$ (Obr. 2).

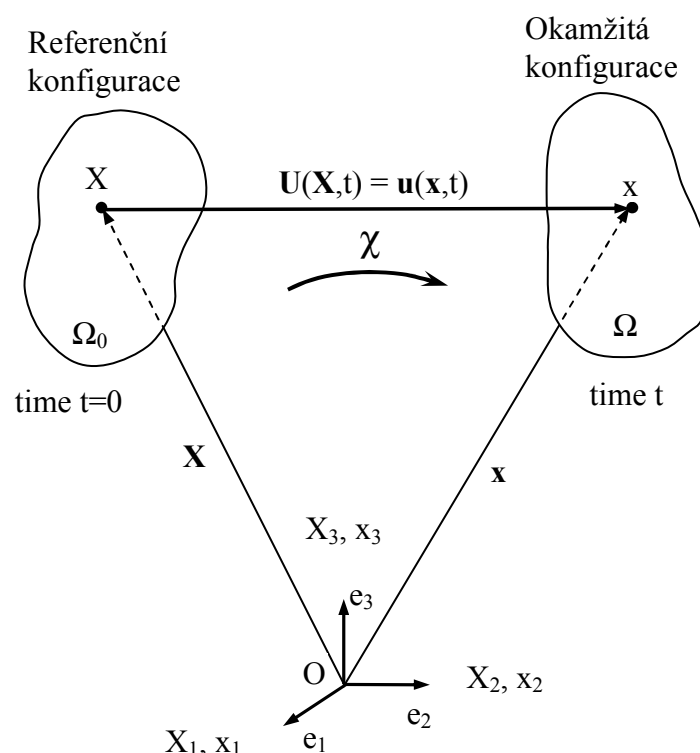
Na obrázku je znázorněn pohyb tělesa z počáteční (referenční) konfigurace Ω_0 v čase $t = 0$ do okamžité konfigurace Ω v čase t . Tento pohyb bere v úvahu velká posunutí a velká přetvoření deformovaného tělesa. Význam jednotlivých veličin, kterými popisujeme deformaci, je dobře patrný z obr. 2 a z následujícího textu. Nejčastěji budeme označovat

X_i – materiálové či lagrangeovské souřadnice.

x_i – prostorové či eulerovské souřadnice.

\mathbf{U}, \mathbf{u} – posuvy

t – čas.



Obr. 2

Posuvy, deformační gradient

Rozdíl mezi prostorovými a materiálovými souřadnicemi definuje posuv částice a nazývá se eulerovské formulace

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad (2.12)$$

Lagrangeovská formulace je běžnější při popisu deformace poddajných těles

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (2.13)$$

Obě formulace při popisu jednoho a téhož deformačního procesu musejí dát stejné číselné výsledky, musejí tedy být vzájemně jednoznačně invertovatelné. Podmínkou invertovatelnosti je nenulovost jacobíanu transformace

$$J = \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \quad (2.14)$$

kde

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.15)$$

Skalární veličina J definovaná vztahem (2.14) se nazývá jacobíán transformace. Tenzorová veličina, definovaná vztahem (2.15) je *deformační gradient*. Je definovaná v konfiguraci Ω , ale vztahuje se ke konfiguraci Ω_0 .

Polární dekompozice (rozklad)

V každém bodu $X \in \Omega_0$ a v čase t budeme mít následující polární dekompozice deformačního gradientu

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}, \quad \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}^T, \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}^T \quad (2.16)$$

kde \mathbf{R} je ortogonální tenzor a \mathbf{U} a \mathbf{V} jsou pozitivně definitní symetrické tenzory dané vztahy

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T\mathbf{F} \quad \text{and} \quad \mathbf{V}^2 = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$$

2.3 Tenzor deformace

Deformace tělesa, tj. změna jeho velikosti a tvaru, se obvykle určuje stanovením posuvů jednotlivých částic a stanovením přetvoření v bezprostředním okolí částic. Míra deformace se nejlépe určuje posuvy vztaženými k celkovým rozměrům tělesa. Tyto míry jsou bez rozměrné a označují se „přetvoření“ (strain), „deformace“ nebo „poměrné deformace“. Míry přetvoření by neměly záviset na zvolené soustavě souřadnic a na pohybu tělesa jako tuhého celku.

Připomeňme, že infinitesimální přetvoření, definované vztahem (Cauchyův tenzor deformace)

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{ij} + u_{ji}) \quad (2.16)$$

Tenzory deformace

Tenzor deformace je vždy třiosý. Může však v některých případech, kdy dochází k velkým deformacím (posuvům) v jedné rovině nebo ploše, být příčná změna rozměrů kontinua zanedbatelná.

Greenova-Lagrangeova tenzoru deformace vyjádřeného v materiálových souřadnicích:

$$\epsilon_{ij}^G = \frac{1}{2} (u_{ij} + u_{ji} + u_{ki}u_{kj}) \quad (2.17)$$

Tenzor deformační gradient \mathbf{F} zobrazuje vektor \mathbf{A} v počáteční konfiguraci na odpovídající vektor \mathbf{a} v deformované konfiguraci

$$\mathbf{F}\mathbf{A} = \mathbf{a}$$

Deformaci, která je výsledkem konečného pohybu, získáme ze změny délky tohoto vektoru

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} &= (\mathbf{F}\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{F}\mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \\ &= \mathbf{A} \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F}) \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} \mathbf{A} \\ &= \mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \mathbf{A} \\ &= 2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} \mathbf{A} \end{aligned}$$

Z tohoto odvození vyplývají definice pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace \mathbf{C} a Green-Lagrangeova tenzoru deformace \mathbf{E} .

Uvádí se formálně jednodušší zápis Greenova tenzoru deformace prostřednictvím materiálového deformačního gradientu \mathbf{F} ve tvaru

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (2.18)$$

Formálně jednodušší zápis Almansiho tenzoru deformace prostřednictvím materiálového deformačního gradientu \mathbf{F} ve tvaru

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}) \quad (2.19)$$

Pravý Cauchyho-Greenyho deformační tenzor \mathbf{C}

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (2.20)$$

Levý Cauchyho-Greenyho deformační tenzor \mathbf{B}

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T \quad (2.21)$$

Logaritmický tenzor přetvoření vztažený k materiálním souřadnicím je dán vztahem

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{oL} = \ln \mathbf{U} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{C} \quad (2.22)$$

Logaritmický tenzor přetvoření vztažený k prostorovým souřadnicím je dán vztahem

$$\boldsymbol{\varepsilon}^L = \ln \mathbf{V} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{B} \quad (2.23)$$

Deformační gradient a tenzory deformace mohou být rozloženy v součin sférické (dilatační) a izochorické (distorsní) části

$$\mathbf{F} = (J^{1/3} \mathbf{I}) \bar{\mathbf{F}} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = J^{2/3} \bar{\mathbf{C}}, \quad \bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}} \quad (2.25)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = J^{2/3} \bar{\mathbf{b}}, \quad \bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{F}}^T \quad (2.26)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) = J^{2/3} \bar{\mathbf{E}} + \frac{1}{2} (J^{1/3} - 1) \mathbf{I}, \quad \bar{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{C}} - \mathbf{I}) \quad (2.27)$$

kde veličiny s pruhem značí distorsní část.

2.4 Tenzory napětí

Napětí je definováno pomocí sil působících na elementární plošky. Síly rozdělujeme na vnější, působící na těleso z vnějšku, a na síly vnitřní, udržující těleso kompaktní. Vnější síly mohou být objemové a povrchové.

- Objemové síly působí jakoby na dálku na těleso nebo element. Jsou to síly gravitační, setrvačné, magnetické a pod. Zpravidla se vztahují na jednotku objemu nebo hustoty (Nm^{-3} , Nkg^{-1}). Ekvivalentní anglický termín *body forces*.
- Povrchové síly působí na krajovou část tělesa nebo elementu. Jsou to vlastně kontaktní síly. Tyto síly mají rozměr $[\text{N/m}^2]$. Jejich anglický název je *surface forces* nebo *traction forces*.

Povrchové síly jsou vlastně i ty, které působí na vnitřní povrch tělesa, obnažený v důsledku procesu uvolňování. Těmto silám se také říká vektory napětí – jsou vztaženy na jednotku plochy. Vektor napětí je obdobně jako výše definován vztahem $\mathbf{t} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S}$, kde $\Delta \mathbf{F}$ je výslednice sil působících na plošku ΔS .

Vztah mezi vektorem napětí a složkami tenzoru napětí je vyjádřen Cauchyho vztahem

$$t_i = \sigma_{ji} n_j \text{ nebo } \mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} \quad (2.28)$$

Pro rovinnou napjatost můžeme Cauchyho vztah zobrazit. Po rozepsání dostaneme

$$\begin{aligned} t_1 &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 \\ t_2 &= \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 \end{aligned} \quad (2.29)$$

V maticovém tvaru je vztah (2.28) vyjádřen

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Tenzor napětí σ_{ij} , tak jak zde bylo ukázáno, vyjadřuje okamžité síly vztažené ke geometrii okamžité konfigurace. Označuje se Cauchyho „skutečné“ napětí. V lineární mechanice jsou deformace tělesa malé, a proto působící síly vztahují ke geometrii počáteční konfigurace. To pak vede k pojmu inženýrského napětí. Použijeme-li horních levých indexů pro rozlišení konfiguračních vztahů, můžeme skutečný (Cauchyho) a inženýrský vektor napětí vyjádřit vztahy

$$\mathbf{t}_{\text{Cauchy}} = {}^t\mathbf{t} = \lim_{\Delta^t S \rightarrow 0} \frac{\Delta^t \mathbf{F}}{\Delta^t S} \quad \mathbf{t}_{\text{eng}} = {}^0\mathbf{t} = \lim_{\Delta^0 S \rightarrow 0} \frac{\Delta^t \mathbf{F}}{\Delta^0 S} \quad (2.31)$$

Těmto vektorům pak odpovídají tenzory skutečného a inženýrského napětí vztahy

$${}^t\mathbf{t}_i = {}^t\sigma_{ji} {}^t n_j \quad {}^0\mathbf{t}_i = {}^0\sigma_{ji} {}^0 n_j \quad (2.32)$$

Výhody používání inženýrského napětí jsou nasnadě. Jejich výpočet je jednoduchý, vychází z geometrie nezdeformované konfigurace a chyby tím vznikající jsou důsledkem malých deformací zanedbatelné. Při řešení nelineárních úloh s velkým posuvy a s velkými deformacemi nás však inženýrské napětí nechá na holičkách. Nebere v úvahu změnu geometrie tělesa při jeho deformaci.

- První Piolův-Kirchhoffův tenzor napětí

$${}^t\mathbf{P} = \frac{{}^0\rho}{{}^t\rho} {}^0\mathbf{F}^{-1} {}^t\sigma \quad (\mathbf{P} = \mathbf{J}\mathbf{F}^{-1}\sigma \Leftrightarrow \sigma = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{F}^T) \quad (2.33)$$

- Druhý Piolův-Kirchhoffův tenzor napětí (symetrický)

$${}^0\mathbf{S} = \frac{{}^0\rho}{{}^t\rho} {}^0\mathbf{F}^{-1} {}^t\sigma {}^t\mathbf{F} \quad (\mathbf{S} = \mathbf{J}\mathbf{F}^{-1}\sigma\mathbf{F}^{-T} \Leftrightarrow \sigma = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T) \quad (2.34)$$

Odvození obou zmíněných tenzorů je založeno na zákonu o zachování hmotnosti a na matematicky konzistentních úvahách o přepočtu síly z jedné konfigurace do druhé (Fung 1965, Okrouhlík 1995, ...). Tenzory jsou nezávislé na volbě souřadnicového systému a necitlivé vůči pohybu tělesa jako tuhého celku. Nemají sice přímého fyzikálního významu, jsou však užitečným nástrojem při formulaci přírůstkových metod vhodných pro řešení nelineárních úloh mechaniky kontinua.

Konjugované dvojice

Míry deformace a míry napětí, jak je zřejmé z výše uvedeného, jsou rozdílné a proto je nutno zvolit vhodnou kombinaci párů tenzoru deformace a tenzoru napětí. Je známo [1], že pár : druhý Piola-Kirchhoffa tenzor napětí a Greenův tenzor přetvoření jsou tzv. Energeticky konjugované. Energeticky konjugované pár je také Cauchyho tenzor napětí a infinitesimální

(inženýrský) tenzor přetvoření. O napětí a přetvoření říkáme, že jsou energeticky konjugované, jestliže jejich skalární součin dává mechanickou práci.

Mechanika práce povrchových a objemových sil v okamžité konfiguraci je rovna

$$W = \int_S \sigma_{ji} n_j u_i dS + \int_V f_j u_i dV \quad (2.35)$$

Použitím Gaussovy věty dostaneme

$$W = \int_V \left[\frac{\partial (\sigma_{ji} u_i)}{\partial x_j} + f_i u_i \right] dV = \int_V \left[\sigma_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + f_i \right) u_i \right] dV \quad (2.36)$$

Druhá část rovnice (2.36) je levá část rovnice rovnováhy, a je tedy rovna nule. Využitím symetrie tenzoru napětí může být mechanická práce výpočtena jako skalární součin Cauchyho tenzoru napětí a infinitesimálního přetvoření v okamžité konfiguraci

$$W = \int_V \sigma_{ji} u_{i,j} dV = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_V [\sigma] : [\varepsilon] dV \quad (2.37)$$

V referenční konfiguraci se dá mechanická práce vyjádřit jako

$$W = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_{^0V} S_{ij} E_{ij} d^0V \quad (2.38)$$

Z hlediska výkonové konjugovanosti je známo [1] pět dvojic. Uvedeme je v maticovém zápis prostřednictvím Cauchyho tenzoru σ

1. První dvojici tvoří symetrický druhý Piola-Kirchhoffa tenzor napětí a Greenův tenzor přetvoření

$$S = J F^{-1} \sigma F^{-T} \Leftrightarrow E = \frac{1}{2} (F^T F - I)$$

2. Druhou dvojici tvoří Hillův symetrický tenzor napětí a Almansiův tenzor přetvoření

$$F^T J \sigma F \Leftrightarrow A = \frac{1}{2} (I - F^{-T} F^{-1})$$

3. Třetí dvojici tvoří sdružený symetrický tenzor napětí a Logaritmický tenzor přetvoření

$$R^T J \sigma R \Leftrightarrow \ln \Delta \quad (\Delta = (F^T F)^{1/2})$$

4. Čtvrtou dvojici tvoří Bioův symetrický tenzor napětí a tenzor protažení

$$\frac{1}{2} (F^{-1} J \sigma R + R^T J \sigma F^{-T}) \Leftrightarrow (\Delta - I)$$

5. Pátou a poslední známou dvojici tvoří Černychův symetrický tenzor napětí a inverzní tenzor protažení

$$\frac{1}{2} (F^T J \sigma R + R^T J \sigma F) \Leftrightarrow (I - \Delta^{-1})$$

2.5 Vztahy mezi napětí a deformací

Zobecněný Hookeův zákon můžeme vyjádřit v tenzorovém zápisu

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (2.39)$$

kde σ_{ij} a ϵ_{ij} jsou tenzory napětí a deformací druhého řádu a C_{ijkl} je tenzor čtvrtého řádu, jehož složky jsou konstanty tuhosti materiálu, 1, 2 a 3 jsou směry os souřadného systému. Všechny tyto tenzory jsou symetrické, C_{ijkl} má 21 nezávislých složek. Užijeme-li zkráceného zápisu, můžeme vztah mezi napětími a deformacemi zapsat v maticovém tvaru

$$\{\sigma\} = [C]\{\epsilon\} \quad (2.40)$$

kde matice $[C]$ je symetrická matice 9x9. Můžeme nyní definovat matici poddajnosti

$$[S] = [C]^{-1} \quad (2.50)$$

a odpovídající vztah

$$\{\epsilon\} = [S]\{\sigma\} \quad (2.51)$$

Veličiny C_{ijkl} jsou obecně funkcemi místa (souřadnic). Jsou-li elastické vlastnosti tělesa ve všech jeho bodech shodné, budou hodnoty C_{ijkl} společné všem bodům tělesa, budou tedy konstantní. Takové těleso nazýváme homogenním.

Jsou-li vlastnosti prostředí v určitém bodě ve všech směrech stejné, říkáme o nich, že jsou v uvažovaném bodě *izotropní*. Je-li prostředí izotropní v každém bodě, mluvíme o *izotropní prostředí*. Jsou-li uvažované vlastnosti v daném bodě prostředí v různých směrech různé, je prostředí v tomto bodě anizotropní a vztahuje-li se toto na celé prostředí, říkáme, že je celé *prostředí anizotropní*.

2.6 Konstitutivní vztahy

2.6.1 Hyperelastický materiál

Konstitutivní rovnice pro hyperelastické materiály vycházejí z postulátu existence Helmholtzovy funkce volné energie Ψ , která je funkcí deformačního gradientu \mathbf{F} . Napěťová odezva hyperelastického materiálu na deformaci je odvozena z této skalární funkce deformační energie [9,12]

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}}, \quad (2.52)$$

$$\sigma = J^{-1} \frac{\partial \Psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T = J^{-1} \mathbf{F} \left(\frac{\partial \Psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \right)^T, \quad (2.53)$$

kde \mathbf{P} je (nesymetrický) první Piola-Kirchhoffův tenzor napětí, σ je Cauchyho tenzor skutečných napětí a J je Jakobián deformačního gradientu. Alternativní vztahy můžeme obdržet pro pravý Cauchy-Greenův tenzor deformace \mathbf{C} , pro druhý (symetrický) Piola-Kirchhoffův tenzor napětí \mathbf{S} a pro Green-Lagrangeův tenzor deformace \mathbf{E} .

$$\sigma = 2J^{-1} \mathbf{F} \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T, \quad (2.54)$$

$$\mathbf{P} = 2\mathbf{F} \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}}, \quad (2.55)$$

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}}, \quad (2.56)$$

Funkce deformační energie musí být invariantní při rotaci tělesa jako tuhého celku. Pro izotropní hyperelastický materiál, jakým je kupř. pryž plněná sazemi, lze vyjádřit Helmholtzův potenciál v závislosti na hlavních invariantech jeho argumentů – kupř. pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace \mathbf{C}

$$\Psi = \Psi(I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C})), \quad (2.57)$$

nebo jako funkcí prodloužení

$$\Psi = \Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad (2.58)$$

2.6.2 Nestlačitelný hyperelastický materiál

Celá řada polymerů při konečných deformacích téměř nemění svůj objem. Takové materiály jsou považovány za nestlačitelné tj. deformace je izochorická. Je to idealizace, která se v mechanice kontinua často používá. Deformace je tedy stísněná a deformační podmínku lze vyjádřit jako $J = 1$.

Obecnou konstitutivní rovnici pro nestlačitelný materiál odvodíme z funkce deformační energie ve tvaru

$$\Psi = \Psi(\mathbf{F}) - p(J - 1) \quad (2.59)$$

kde p je neurčitý Lagrangeův násobitel, který lze považovat za hydrostatický tlak. Jeho hodnotu lze určit z podmínek rovnováhy a z okrajových podmínek.

Konstitutivní rovnice pak budou v obecném tvaru

$$\mathbf{P} = -p\mathbf{F}^{-T} + \frac{\partial \Psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}}, \quad (2.60)$$

$$\mathbf{S} = -p\mathbf{C}^{-1} + 2 \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}}, \quad (2.61)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mathbf{F} \left(\frac{\partial \Psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \right)^T \quad (2.62)$$

2.6.3 Stlačitelný hyperelastický materiál

Pěnové elastomerské materiály vykazují objemovou změnu při konečných deformacích. Jedinou podmínkou pro tyto materiály je kladná hodnota objemové změny J . Protože se tyto materiály chovají odlišně při objemové a smykové deformaci, je třeba jejich deformaci rozdělit na tzv. objemovou a izochorickou část. Deformační gradient \mathbf{F} a pravý Cauchy-Greenův deformační tenzor \mathbf{C} jsou podrobně jako v elastoplasticitě rozloženy v součin složky odpovídající změně objemu (dilatační část) a složky zachovávající objem (distorsní část)

$$\mathbf{F} = (J^{1/3} \mathbf{I}) \bar{\mathbf{F}} \quad (2.63)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = (J^{2/3} \mathbf{I}) \bar{\mathbf{C}}, \quad \bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}} \quad (2.64)$$

Členy $J^{1/3} \mathbf{I}$ a $(J^{2/3} \mathbf{I})$ jsou spojeny s deformací odpovídající změně objemu, zatímco členy $\bar{\mathbf{F}}$ a $\bar{\mathbf{C}}$ jsou modifikovaný deformační gradient a modifikovaný pravý Cauchy-Greenův tenzor deformace odpovídající distorsi tvaru.

Obdobně je rozložena funkce deformační energie

$$\Psi(\mathbf{C}) = \Psi_{\text{vol}}(J) + \Psi_{\text{iso}}(\bar{\mathbf{C}}) \quad (2.65)$$

kde $\Psi_{\text{vol}}(J)$ a $\Psi_{\text{iso}}(\bar{\mathbf{C}})$ jsou funkcí skalární hodnoty J a tenzory $\bar{\mathbf{C}}$, které popisují objemovou (dilatační) elastickou odezvu a izochorickou (distorsní) elastickou odezvu materiálu.

2.6.4 Příčně izotropní materiály

Řada kompozitních materiálů je složena z matice a vláknenné výztuže. Takový materiál je anizotropní. Materiál s výztuží pouze v jednom směru lze považovat za příčně izotropní s rovinou izotropie kolmou na směr vláken. Je-li tento materiál schopen snášet konečné deformace, pak bude Helmholtzova volná energie funkcí dvou proměných – pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace \mathbf{C} a směrového vektoru vláken v nedeformované konfiguraci \mathbf{a}_0 . Zavedeme-li tenzorový součin směrových vektorů $\mathbf{A} = \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0$, pak deformační energii můžeme vyjádřit

$$\Psi = \Psi(\mathbf{C}, \mathbf{A}) \quad (2.66)$$

Izotropní hyperelastický materiál může být reprezentován prvními třemi invarianty I_1, I_2 a I_3 pravého \mathbf{C} či levého \mathbf{B} Cauchy-Greenova tenzoru deformace, pro příčně izotropní materiál je třeba přidat další dva invarianty

$$I_4(\mathbf{C}, \mathbf{a}_0) = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C} \mathbf{a}_0 = \lambda_a^2, \quad (2.67)$$

$$I_5(\mathbf{C}, \mathbf{a}_0) = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C}^2 \mathbf{a}_0, \quad (2.68)$$

na kterých bude záviset funkce deformační energie. Invariant I_4 je roven kvadrátu prodloužení ve směru vláken. Volná energie pro příčně izotropní materiál, která je základem pro odvození konstitutivních rovnic, bude funkcí těchto pěti invariantů

$$\Psi = \Psi(I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C}), I_4(\mathbf{C}, \mathbf{a}_0), I_5(\mathbf{C}, \mathbf{a}_0)) \quad (2.69)$$

Konstitutivní rovnice ve tvaru invariantů

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi(\mathbf{C}, \mathbf{A})}{\partial \mathbf{C}} = 2 \sum_{a=1}^5 \frac{\partial \Psi(\mathbf{C}, \mathbf{A})}{\partial I_a} \frac{\partial I_a}{\partial \mathbf{C}}, \quad (2.70)$$

kde

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{I}, \quad \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} = I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C}, \quad \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} = I_3 \mathbf{C}^{-1}, \quad (2.71)$$

$$\frac{\partial I_4}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0, \quad \frac{\partial I_5}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{C} \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_0 \mathbf{C} \otimes \mathbf{a}_0,$$

Dosazením (2.71) do (2.70) dostaneme

$$\mathbf{S} = 2 \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \right) \mathbf{I} - \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \mathbf{C} + I_1 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \mathbf{C}^{-1} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_4} \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 + \frac{\partial \Psi}{\partial I_5} \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{C} \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_0 \mathbf{C} \otimes \mathbf{a}_0 \right], \quad (2.72)$$

2.6.5 Nestlačitelný příčně izotropní materiál

1) Předpokládejme, že matice příčně izotropního kompozitu je izotropní a nestlačitelná a že vlákna výztuže jsou schopna prodloužení. Z nestlačitelnosti matrice vyplývá $I_3 = 1$ a ve vztahu pro volnou energii je nutné přidat člen s hydrostatickým tlakem

$$\Psi = \Psi(I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_4(\mathbf{C}, \mathbf{a}_0), I_5(\mathbf{C}, \mathbf{a}_0)) - \frac{1}{2}p(I_3 - 1), \quad (2.73)$$

2) V případě izotropní a nestlačitelné matice a neprodlužitelných vláken máme $I_3 = 1$ a $\lambda_a = 1$ ($I_4 = 1$) a do vztahu pro volnou energii přidáme neurčitý Lagrangeův násobitel q

$$\Psi = \Psi(I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_5(\mathbf{C}, \mathbf{a}_0)) - \frac{1}{2}p(I_3 - 1) - \frac{1}{2}q(I_4 - 1), \quad (2.74)$$

2.6.6 Kompozitní materiál se dvěma skupinami výztužných vláken

Předpokládejme, že směrové vektory vláken v nedeformované konfiguraci jsou \mathbf{a}_0 a \mathbf{g}_0 . Analogicky můžeme definovat dva tenzory

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0, \quad \mathbf{G} = \mathbf{g}_0 \otimes \mathbf{g}_0 \quad (2.75)$$

A zavést funkci volné energie

$$\Psi = \Psi(\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{G}) \quad (2.76)$$

K pěti invariantům v případě příčně izotropního materiálu přidáme další tři

$$\begin{aligned} I_6(\mathbf{C}, \mathbf{g}_0) &= \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{C} \mathbf{g}_0 = \lambda_g^2, \\ I_7(\mathbf{C}, \mathbf{g}_0) &= \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{C}^2 \mathbf{g}_0 \\ I_8(\mathbf{C}, \mathbf{a}_0, \mathbf{g}_0) &= (\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{g}_0) \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C} \mathbf{g}_0 \end{aligned} \quad (2.77)$$

Jsou-li skupiny vláken navzájem kolmé, máme ortotropní materiál. Za předpokladu, že matrice je izotropní a nestlačitelná a za předpokladu neprodlužitelnosti vláken, můžeme Helmholtzovu funkci volné energie zapsat ve tvaru

$$\Psi = \Psi(I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_5(\mathbf{C}, \mathbf{a}_0), I_7(\mathbf{C}, \mathbf{g}_0)) - \frac{1}{2}p(I_3 - 1) - \frac{1}{2}q(I_4 - 1) - \frac{1}{2}r(I_6 - 1), \quad (2.74)$$

Jsou-li obě skupiny vláken mechanicky ekvivalentní pak, i když nejsou nutně ortogonální, je materiál v referenční konfiguraci ortotropní.

2.7 Funkce deformační energie

V literatuře lze najít celou řadu těchto funkcí pro stlačitelný i nestlačitelný materiál. Některé z nejčastěji užívaných (Neo-Hookean, Mooney-Rivlin, Ogden, Blatz-Ko, ap.) jsou implementovány do konečných prvků [9].

2.7.1 Funkce deformační energie pro izotropní materiály

a) Ogdenův model pro nestlačitelný materiál (pryž, biomateriál ap.). Pryž je považována za nestlačitelnou ($J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$). Ogden zavádí deformační energii jako funkci hlavních prodloužení ve tvaru

$$\Psi = \Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} (\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p} - 3) \quad (2.75)$$

kde N je počet členů (většinou $N \leq 3$). Parametry μ_p (smykové moduly) a bezrozměrné parametry α_p je nutné určit experimentálně. Ogdenův model, který se v poslední době stal populární, má nekonstantní modul ve smyku a dává dobrou korelaci v tahových zkouškách až do 700% deformace a je schopen zpevnění či změknutí při velkých deformacích.

b) Mooney-Rivlin, neo-Hookeovský a Vargův model pro nestlačitelné materiály. Tyto klasické modely pryžového materiálu lze získat jako zvláštní případ Ogdenova modelu.

Kupř. Mooney-Rivlinův model dostaneme položíme-li $N=2$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -2$

$$\begin{aligned} \Psi &= c_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + c_2(\lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2} - 3) \\ &= c_1(I_1 - 3) + c_2(I_2 - 3) \end{aligned} \quad (2.76)$$

kde ty konstanty $c_1 = \mu_1/2$ a $c_2 = \mu_2/2$ ($\mu = \mu_1 - \mu_2$).

Tento model dobře popisuje chování izotropní pryže při tahovém zatížení až do 100% deformace. Není adekvátní pro tlakové zatížení a není schopen postihnout zpevnění materiálu při velkých deformacích.

Pro $N = 1$, $\alpha_1 = 2$ dostáváme *neo-Hookeovský* model, který dává dobrou korelaci s experimentálními daty do 40% deformace v tahu a do 90% deformace v čistém smyku

$$\Psi = c_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) = c_1(I_1 - 3) \quad (2.77)$$

a Vargův model dostaneme pro $N = 1$, $\alpha_1 = 1$

$$\Psi = c_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3) \quad (2.78)$$

c) Yeohův model

U elastomerů vyztužených částicemi sazí nebo křemíku se modul ve smyku výrazně mění s deformací – nejprve se s rostoucí deformací snižuje a posléze opět stoupá při velkých deformacích.

Experimenty ukazují, že $\frac{\partial \Psi}{\partial I_2}$ je pro tyto materiály blízké 0. Materiálový model Yeohův předpokládá deformační funkci, ve které chybí druhý invariant

$$\Psi = c_1(I_1 - 3) + c_2(I_1 - 3)^2 + c_3(I_1 - 3)^3 \quad (2.79)$$

Smykový modul obsahuje první a druhou mocninu členu $(I_1 - 3)$ a aproximuje experimentální závislost s dostatečnou přesností

$$2\mu = c_1 + 2c_2(I_1 - 3) + 3c_3(I_1 - 3)^2 > 0$$

d) Blatz-Ko model pro pěnové elastomery

Ve funkci deformační energie se kombinují teoretické proměnné s experimentálními daty

$$\Psi(I_1, I_2, I_3) = f \frac{\mu}{2} \left[(I_1 - 3) + \frac{1}{\beta} (I_3^{-\beta} - 1) \right] + (1 - f) \frac{\mu}{2} \left[\left(\frac{I_2}{I_3} - 3 \right) + \frac{1}{\beta} (I_3^{\beta} - 1) \right] \quad (2.80)$$

kde $\beta = \frac{\nu}{1-2\nu}$, ν je Poissonův poměr, μ je modul ve smyku a $f \in [0,1]$ je interpolační parametr.

e) Saint-Venant-Kirchhoffův model

Je to klasický nelineární model pro stlačitelné hyperelastické materiály. Je charakterizován funkcí deformační energie

$$\Psi(\mathbf{E}) = \frac{\gamma}{2} (\text{tr} \mathbf{E})^2 + \mu \text{tr} \mathbf{E}^2 \quad (2.81)$$

kde \mathbf{E} je Green-Lagrangeův tenzor deformace, $\gamma > 0$ a $\mu > 0$ jsou Lamého konstanty. Tento model je vhodný pro velké posuvy, ale nedoporučuje se pro velká stlačení.

2.7.1 Funkce deformační energie pro anizotropní materiály

Funkce deformační energie (2.66) a (2.76) lze vyjádřit jako součet izotropní a anizotropní části $\Psi = \Psi_{\text{izo}} + \Psi_{\text{anizo}}$

a) Příčně izotropní materiál

Bonet [5] používá pro izotropní část deformační energie Saint-Venantův model (2.81) pro malé deformace, pro nelineární deformace ho nahrazuje neo-Hookeovským modelem (2.77). Anizotropní část deformační energie je vyjádřena vztahem

$$\Psi_{\text{tn}} = [\alpha + \beta(I_1 - 3) + \gamma(I_4 - 1)](I_4 - 1) - \frac{1}{2} \alpha(I_5 - 1) \quad (2.82)$$

Je však nutné si uvědomit, že i když je daný materiál příčně izotropní v nedeformované konfiguraci, nemusí to platit v deformované konfiguraci. Vztah (2.82) lze z tohoto důvodu upravit tak, že člen $(I_1 - 3)$, který je lineární funkcí \mathbf{C} , nahradíme členem $\ln J$.

$$\Psi_{\text{tn}} = [\alpha + \beta \ln J + \gamma(I_4 - 1)](I_4 - 1) - \frac{1}{2} \alpha(I_5 - 1) \quad (2.83)$$

b) Materiál vyztužený dvěma skupinami vláken

Holzapfel a kol. [6-8] používají k modelování izotropní část deformační energie neo-Hookeovský model (2.77), který však může být nahrazen Ogdenovým (2.75), nebo jiným vhodným modelem. K modelování anizotropní část používají exponenciální funkci

$$\Psi_{\text{anizo}} = \frac{k_1}{2k_2} \sum_{i=4,6} \left\{ \exp[k_2(I_i - 1)^2] - 1 \right\} \quad (2.84)$$

$k_1 > 0$ a $k_2 > 0$ jsou parametry materiálů.

III. VARIČNÍ METODY MECHANIKY KONTINUA

Složité problémy v mechanice kontinua jsou těžké řešit přesně analytickou metodou. Proto se musíme uchýlit k přibližným metodám či numerickým metodám. Existují v technice mnoho aplikace proměnných veličin hledat užitečný extrém. To je podstata variační metody.

V inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky se velmi často setkáváme s rovnicemi typu

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (3.1)$$

kde b je prvek některého Hilbertova prostoru H a A je určitý operátor, nejčastěji pozitivní resp. pozitivně definitní (definiční obor D_A) [10].

Řešením rovnice $Ax = b$ pak rozumíme takový prvek $x_0 \in D_A$, pro který platí

$$Ax_0 = b \quad (3.2)$$

Je-li pozitivní operátor A (pozitivně definitní) úloha najít řešení x_0 rovnice $Ax = b$ ekvivalentní úloze najít prvek x_0 , minimalizující kvadratický funkcionál

$$Fx = (Ax, x) - 2(b, x) \quad (3.3)$$

Pravě pro $x = x_0$ minimální hodnoty na D_A .

Eulerova rovnice

Funkce $y(x)$, $x \in (a, b)$. Řešit rovnici $y(x) = 0$, to znamená, že hledat minimum funkcionálu.

$$\text{Funkcionál } I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

$$\text{Eulerova rovnice : } F_y - \dot{F}_{y'} = 0, \quad F_y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'}, \quad \dot{F}_{y'} = \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}$$

3.1 Variační principy

Tyto principy jsou vysvětleny ve vznikající Washizuově monografii [11] spolu s celou řadou příkladů jejich užití. Zde bude uveden jen jejich stručný přehled.

Základem variačních principů je princip virtuálních prací, který lze formulovat následovně:

*Nechť mechanický systém s danými geometrickými vazbami je v rovnováze za působení soustavy sil. Pak součet všech virtuálních prací δ^*W všech vnějších i vnitřních sil na libovolných nekonečně malých virtuálních posuvech vyhovujících daným geometrickým vazbám je roven nule:*

$$\delta^*W = 0 \quad (3.5)$$

Jestliže všechny vnější i vnitřní síly jsou konzervativní, tj. mají potenciál U , který je funkcí souřadnic, pak platí

$$\delta^*W = -\delta U \quad (3.6)$$

a princip virtuálních prací vede k principu stacionární hodnoty potenciální energie U :

Ze všech přípustných konfigurací soustavy je rovnovážný stav charakterizován stacionární hodnotou potenciální energie U :

$$\delta U = 0. \quad (3.7)$$

Tato formulace může být rozšířena i na dynamické problémy, kdy působí síly i geometrické vazby závisí na čase, použijeme-li d' Alembertův princip dynamické rovnováhy a zahrneme-li i virtuální práci setrvačných sil:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt + \int_{t_1}^{t_2} d^*W dt = 0 \quad (3.8)$$

kde T je kinetická energie systému, t_1 a t_2 je počáteční a konečný časový okamžik, ve kterých poloha systému odpovídá poloze při skutečném pohybu – virtuální posuvy jsou v těchto okamžicích rovny nule. Jestliže všechny vnější i uvnitřní síly mají potenciál U , pro který platí (3.7), dostáváme Hamiltonův princip, který říká :

Mezi všemi možnými virtuálními trajektoriemi systému je skutečná trajektorie charakterizována stacionární hodnotou funkcionálu:

$$\int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt$$

Zavedeme-li Lagrangeův kinetický potenciál

$$L = T - U \quad (3.9)$$

Pak Hamiltonův princip lze zapsat

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (3.10)$$

Variační metody mají široké použití v pružnosti analýze za předpokladu malých deformací. Existuje-li funkce energie napjatosti a při variaci posuvů zůstávají vnější síly nezměněné, pak princip virtuální práce vede k principu minima deformační energie. Tento variační princip spolu se zavedením Lagrangeových multiplikátorů vede k celé řadě variačních principů včetně principu Hu-Washizuova, Hellinger-Reissnerova, principu minima doplňkové energie a dalších.

Definujme funkci deformační energie $A(\varepsilon_{ij})$ tak, že platí

$$\delta A = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}, \quad \text{kde} \quad 2A = C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad (3.11)$$

Dosadíme-li do (3.11) z Cauchyho vztahů pro deformace

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{j,i} + u_{i,j}) \quad (3.12)$$

dostaneme funkci $A(u_i)$ a princip virtuální práce můžeme zapsat ve tvaru

$$\delta \int_{\Omega} A(u_i) d\Omega - \int_{\Omega} X_i \delta u_i d\Omega - \int_{\Gamma_p} \tilde{p}_i \delta u_i d\Gamma = 0 \quad (3.13)$$

kde Ω je oblast, kterou zaujímá těleso, \tilde{p}_i je vektor zatížení na části povrchu Γ_p a X_i jsou hmotové síly.

Definujme funkci doplňkové deformační energie $B(\sigma_{ij})$ tak, že platí

$$\delta B = \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij}, \quad \text{kde} \quad 2B = S_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \quad (3.14)$$

potom princip doplňkové virtuální práce bude ve tvaru

$$\delta \int_{\Omega} B(\sigma_{ij}) d\Omega - \int_{\Gamma_u} \tilde{u}_i \delta p_i d\Gamma = 0 \quad (3.15)$$

kde \tilde{u}_i je vektor posuvu předepsaný na části povrchu Γ_u a $p_i = \sigma_{ij} n_j$.

Předpokládáme-li, že hmotové síly X_i , povrchová zatížení \tilde{p}_i a posuvy \tilde{u}_i jsou předepsány a při variacích se nemění, pak lze vyjádřit celkovou potenciální energii a celku doplňkovou potenciální energii jako:

$$\Pi = \int_{\Omega} [A(u_i) - X_i u_i] d\Omega - \int_{\Gamma_p} \tilde{p}_i u_i d\Gamma \quad (3.16)$$

$$\text{a} \quad \Pi_c = \int_{\Omega} B(\sigma_{ij}) d\Omega - \int_{\Gamma_u} \tilde{u}_i p_i d\Gamma \quad (3.17)$$

a princip minima celkové potenciální energie a celkové doplňkové energie vyjádříme vztahy

$$\delta\Pi = 0 \quad \text{a} \quad \delta\Pi_c = 0 \quad (3.18)$$

Platí-li lineární vztah mezi napětím a deformací, pak platí $A = B$, ve všech případech však platí

$$A + B = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (3.19)$$

Hu-Washizův variační funkcionál můžeme vyjádřit ve tvaru

$$H = \int_{\Omega} \left\{ A(\varepsilon_{ij}) - X_i u_i - \left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \sigma_{ij} \right\} d\Omega - \int_{\Gamma_p} \tilde{p}_i u_i d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (u_i - \tilde{u}_i) p_i d\Gamma \quad (3.20)$$

kde $\varepsilon_{ij}, u_i, \sigma_{ij}$ a p_i jsou vzájemně nezávislé veličiny podrobené variacím, \tilde{p}_i je vektor zatížení na části povrchu Γ_p a \tilde{u}_i je vektor posuvu předepsaný na části povrchu Γ_u , $A(\varepsilon_{ij})$ je energie napjatosti a X_i jsou hmotové síly. Variací (3.20) vzhledem k těmto osmnácti nezávislým veličinám dostáváme

$$\begin{aligned} \delta H = & \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij} \right) \delta \varepsilon_{ij} - \left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \delta \sigma_{ij} - \left(\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} - X_i \right) \delta u_i \right\} d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_p} (\sigma_{ji} n_j - \tilde{p}_i) \delta u_i d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (u_i - \tilde{u}_i) \delta p_i d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (\sigma_{ji} n_j - p_i) \delta u_i d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Stacionární podmínky, které vyplývají z (3.21) jsou: Vztahy mezi napětími a deformacemi, Cauchyho vztahy, podmínky rovnováhy a okrajové podmínky na Γ_u a Γ_p . Fyzikální význam Lagrangeových multiplikátorů p_i vyplývá z posledního výrazu v (3.21): jsou to povrchové síly na té části okraje, na které jsou předepsány posuvy.

Funkcionál Hellinger-Reissnerův lze odvodit z obecného funkcionálu (3.20). Veličiny ε_{ij} již nebudeme považovat za nezávislé a jejich variace $\delta \varepsilon_{ij}$ budou nulové, dále budeme předpokládat platnost Cauchyho vztahů (3.12) a lineární vztah mezi napětí a deformací:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (3.22)$$

V takovém případě lze složky deformací zcela vyloučit z podintegrálního výrazu (3.20) a získat funkcionál:

$$\Pi_R = \int_{\Omega} \left\{ \sigma_{ij} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - X_i u_i - B(\sigma_{ij}) \right\} d\Omega - \int_{\Gamma_p} \tilde{p}_i u_i d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (u_i - \tilde{u}_i) p_i d\Gamma \quad (3.23)$$

kde u_i, σ_{ij} a p_i jsou vzájemně nezávislé veličiny podrobené variacím a funkce B plyne z (3.14).

Aplikujeme-li Hellinger-Reissnerův variační teorém spolu s Hamiltonovým principem získáme funkcionál:

$$\Phi = \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi_R) dt \quad (3.24)$$

a pohybové rovnice systému získáme z podmínky stacionární hodnoty tohoto funkcionálu:

$$\delta\Phi = 0. \quad (3.25)$$

3.2 Variační metody řešení okrajových úloh

Uvažujeme soustavu m diferenciálních rovnic

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad x \in \langle a, b \rangle \quad (3.26)$$

s obecnou okrajovou podmínkou

$$\mathbf{r}(\mathbf{y}(a), \mathbf{y}(b)) = \mathbf{0}. \quad (3.27)$$

Místo hledání řešení v určitých bodech, hledají variační metody řešení v jisté třídě funkcí, pokud je $\varphi_k(x)$ úplný systém funkcí, lze řešení napsat

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \quad (3.28)$$

a zbývá najít neznáme koeficienty a_k . Samozřejmě se pak omezíme na konečný počet funkcí.

Převědeme okrajové podmínky na homogenní a obyčejnou diferenciální rovnici napíšeme ve tvaru

$$A y(x) = f(x) \quad L_m^{(a)} y = 0 \quad L_m^{(b)} y = 0$$

kde A je diferenciální operátor. Zvolíme báze funkce $\varphi_k(x)$ takové, že \forall splňují okrajové podmínky. V prostoru funkcí zavedeme skalární součin, často $(u, v) = \int_a^b u(x) v(x) dx$.

Pozn. Většina metod je určena pro lineární operátory A, ale např. *Galerkinovu metodu* lze užít i pro nelineární operátory.

Galerkinova metoda

$$Ay = f \Rightarrow (Ay - f, \varphi_j) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Uvažujeme přibližné řešení ve tvaru

$$y_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k$$

Po dosazení získáme systém rovnic pro koeficienty a_k

$$(Ay_n - f, \varphi_j) = \int_a^b (Ay_n - f) \varphi_j dx = \int_a^b \left(A \left[\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \right] - f, \varphi_j \right) dx = 0$$

Metoda konečných prvků (finite element method) je variační metoda, která užívá speciální báze funkce, z nichž každá je nenulová jen v určitém krátkém intervalu. Báze funkce pro metodu konečných prvků mohou být například:

$\varphi_i = 0$	pro	$x \leq x_{i-1}$
$\varphi_i = 1 - \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}}$	pro	$x_{i-1} \leq x \leq x_i$
$\varphi_i = 1 - \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$	pro	$x_i \leq x \leq x_{i+1}$
$\varphi_i = 0$	pro	$x_{i+1} \leq x$

Uvedený tvar báзовých funkcí lze použít, pokud diferenciální rovnice obsahují maximálně 2. derivaci, jinak je třeba volit hladší báзовé funkce (např. zvonové spliny).

4. Metoda konečných prvků

Metoda konečných prvků (FEM – Finite Element Method), se s výhodou používá pro řešení různých problémů v oblasti mechaniky poddajných těles.

V metodě konečných prvků (MKP) vyplníme objem uvažovaného tělesa mnoha náhradními částmi jednoduchých geometrických tvarů - ty nazýváme prvky – a máme zato, že při vyplňování objemu nevznikly žádné umělé dutiny a že prvky jsou pospojovány jen několika svými hraničními body. Konečným prvkem nazýváme zvolený element (objemu, plochy, délky) definovaný uzly v rozích, popř. i na hranách.

Existují mnohé způsoby jak vysvětlit a odvodit základní vztahy pro metodu konečných prvků. Jeden z nich, zde uvedený, je založen na principu virtuálních prací.

4.1 Princip virtuálních prací

Princip virtuálních prací hraje v mechanice kontinua důležitou roli. Je též nazýván principem virtuálních posunutí. Duálním principem k principu virtuálních posunutí je princip virtuálních sil [3]. Virtuální práce je fiktivní práce, kterou vykonají staticky přípustné síly a napětí při infinitesimálních kinematiky přístupných posunutí.

Virtuální práce δU , vykonaná vnitřními silami, je rovna práci δW , vykonané vnějšími silami

$$\delta U = \delta W \quad (4.1)$$

Virtuální práci vnějších sil je dána virtuální práci povrchových a objemových sil

$$\delta W = \int_S \delta u_i t_i dS + \int_V \delta u_i f_i dV \quad (4.2)$$

Virtuální posuvy δu_i jsou myšlené, nikoliv skutečné, infinitesimální posuvy udělené každé částici tělesa.

Z výkonu vnitřních sil podle (2.5.76 [3]) se dá odvodit virtuální práce sil ve tvaru

$$\delta U = \int_V \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dV \quad (4.3)$$

Připojíme-li virtuální práci osamělých sil, se kterými se tak často pracuje v inženýrské praxi dostaneme

$$\sum_i \delta q_i Q_i, \quad (4.4)$$

můžeme celkovou bilanci virtuálních sil napsat ve tvaru, v něm se s ní často setkáváme v textech věnovaných metodě konečných prvků (Bathe, 1996)

$$\int_V \delta \epsilon_{ij} \sigma_{ij} dV = \int_S \delta u_i t_i dS + \int_V \delta u_i f_i dV + \sum_i \delta q_i Q_i \quad (4.5)$$

Vyjádřeno slovy, virtuální práce vnitřních sil se rovná součtu virtuální práci sil objemových, povrchových a osamělých. Veličina δq_i , odpovídá předepsanému virtuálnímu posunutí v místě působitě síly Q_i .

4.2 Soustavy nelineárních rovnic v MKP

Se soustavami nelineárních rovnic se v metodě konečných prvků setkáváme často.

4.2.1 Rovnice rovnováhy tělesa

Statická rovnice rovnováhy tělesa má po diskretizaci tvar

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{R} \quad (4.6)$$

Kde \mathbf{K} je matice tuhosti, \mathbf{u} vektor posunutí a \mathbf{R} je vektor uzlových sil.

Rovnici (4.6) lze přepsat do obecného tvaru

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}) = \mathbf{K}(\mathbf{u})\mathbf{u} - \mathbf{R}(\mathbf{u}) = 0 \quad (4.7)$$

kde $\mathbf{g}(\mathbf{u})$ je gradient potenciální energie, známý též jako reziduální vektor (out-of-balance-force).

4.2.2 Rovnice stacionárního vedení tepla

Rovnice stacionárního vedení tepla vyjadřuje závislost mezi přiváděným výkonem \mathbf{Q} a vektorem uzlových teplot \mathbf{T} jako

$$\mathbf{K}\mathbf{T} = \mathbf{Q} \quad (4.8)$$

Tepelný tok Q na povrchu tělesa bývá nejčastěji popsán přestupem

$$Q = \alpha(T - T_0), \quad \alpha = \alpha(T) \quad (9)$$

kde T_0 je teplota okolí a α je součinitel přestupu tepla. Protože $\alpha = \alpha(T)$, bude matice tepelné vodivosti \mathbf{K} i pravá strana \mathbf{Q} funkcí teploty tělesa. Podobně jako (4.7) můžeme psát

$$\mathbf{g}(\mathbf{T}) = \mathbf{K}(\mathbf{T})\mathbf{T} - \mathbf{Q}(\mathbf{T}) = 0 \quad (4.10)$$

4.2.3 Konstitutivní vztahy

Konstitutivní vztahy dávají do souvislosti tenzor napětí $\boldsymbol{\sigma}$ s tenzorem deformace $\boldsymbol{\epsilon}$, např. Pro nelineárně pružný materiál

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}, \text{ kde } \mathbf{D} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\epsilon}), \text{ resp. } \mathbf{D} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (4.11)$$

Můžeme považovat (4.11) za soustavu nelineárních rovnic typu $\mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ nebo, což bude pro další účely výhodnější

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}), \quad \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{D}(\boldsymbol{\sigma}) \boldsymbol{\epsilon}, \quad (4.12)$$

Základním algoritmem řešení soustav nelineárních rovnic na globální úrovni je Newtonova-Raphsonova (NR) metoda.

4.3 Newtonova-Raphsonova metoda

Problém na globální úrovni můžeme formulovat následujícím způsobem: Hledáme řešení \mathbf{u} , přičemž k dispozici máme jen aproximaci \mathbf{u}_n , tedy

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}_n) \neq 0, \quad \mathbf{g}(\mathbf{u}) = 0. \quad (4.13)$$

$$\text{Označme } \mathbf{g}_n = \mathbf{g}(\mathbf{u}_n), \quad \Delta \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n \quad (4.14)$$

Definujeme Jacobian (tangenciální) matici

$$K_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial u_j}, \text{ kde } g_i = g_i(u_j), \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (4.15)$$

nebo stručně

$$\mathbf{K}_n = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}_n} \quad (4.16)$$

Dále definujeme hessián

$$H_{ijk} = \frac{\partial^2 g_i}{\partial u_j \partial u_k}, \quad \mathbf{H}_n = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}^2} \right|_{\mathbf{u}_n} \quad (4.17)$$

Rozvojem (4.13)₂ do Taylorovo řady v okolí bodu \mathbf{u}_n

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}) = \mathbf{g}_n + \mathbf{K}_n(\mathbf{u} - \mathbf{u}_n) + \frac{1}{2} \mathbf{H}_n(\mathbf{u} - \mathbf{u}_n)^2 + \mathbf{O}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_n)^3 = 0 \quad (4.18)$$

Zanedbáním kvadratické členy a členů vyšších řádů obdržíme výraz pro novou aproximaci \mathbf{u}_{n+1}

$$\mathbf{K}_n(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) = -\mathbf{g}_n \quad (4.19)$$

NR algortimus

- 1) $\mathbf{u}_0 = 0$
- 2) $\mathbf{g}_n = \mathbf{g}(\mathbf{u}_n) = 0 \rightarrow \text{exit}$
- 3) sestavit $\mathbf{K}_n = \partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{u}$ v bodě \mathbf{u}_n
- 4) $\mathbf{K}_n \Delta \mathbf{u}_{n+1} = -\mathbf{g}_n$
- 5) $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u}_{n+1}$

Nová aproximaci \mathbf{u}_{n+1} anuluje jen první dva členy řady (4.18). Zbytek, počítáme kvadratickým členem, představuje chybu aproximace. Dá se tedy očekovat, že v následující iteraci, kdy bude eliminován reziduál $\frac{1}{2} \mathbf{H}_n(\mathbf{u} - \mathbf{u}_n)^2 + \mathbf{O}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_n)^3$, vznikne chyba řádů $\mathbf{O}(\mathbf{u}_{n+2} - \mathbf{u}_{n+1})^2 \approx \mathbf{O}(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n)^4$ atd. Metoda bude zřejmě konvergovat kvadraticky.

LITERATURA

- [1] Bohuslav Stříž, Mechanika textilií, část 1 : Základy mechaniky kontinua. Technická univerzita v Liberci, 2001.
- [2] Bohuslav Stříž, Mechanika textilií, část 2 : Aplikace mechaniky kontinua. Technická univerzita v Liberci, 2001.
- [3] Okrouhlík. M., Mechanika poddajných těles, numerická matematika a superpočítače. Ústav termomechaniky, Praha 1997.
- [4] Okrouhlík. M., Implementation of Nonlinear Continuum Mechanics in Finite Element Codes. Institute of Thermomechanics, Prague 1995.
- [5] Bonet, J., Burton, A.J., A simple orthotropic, transversely isotropic hyperelastic constitutive equation for large strain computations, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 162, 1998, 151-164.
- [6] Holzapfel, G.A., Gasser, T.C., Ogden, R.W., A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models, J. of Elasticity, Nov. 23, 2000.
- [7] Gerhard A. Holzapfel & Thomas C. Gasser, A viscoelastic model for fiber-reinforced composites at finite strains: Continuum basis, computational aspects and applications, BIOMECH 4.2000. (gasser.pdf)
- [8] G. A. Holzapfel. Biomechanics of soft tissue. Graz, November 2000.
- [9] Gerhard A. Holzapfel. Nonlinear solid mechanics, John Wiley & Sons Ltd, Baffins Lane, Chichester West Sussex PO19 1UD, England, 2000.
- [10] Karel Rektorys a spolupracovníci. Přehled užití matematiky. Praha 1995.
- [11] Washizu. K., Variational methods in elasticity and plasticity. 3th New York, USA, 1982.
- [12] Bohdana Marvalová, Určení efektivních mechanických vlastností kompozitů vyztužených tkaninou plátnové vazby.