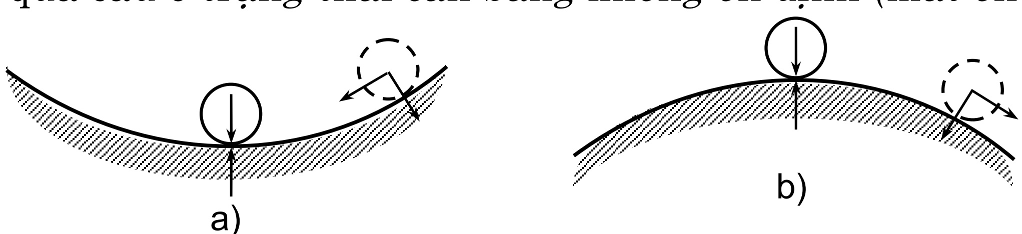
Chương 9. SỰ ỔN ĐỊNH CỦA HỆ ĐÀN HỒI

I. KHÁI NIỆM

⇒ Thực tế có nhiều trường hợp nếu chỉ tính độ bền và độ cứng vẫn chưa đủ đảm bảo an toàn cho kết cấu, vì nó có thể bị phá hỏng do *sự mất ổn định* ⇒ cần phải chú ý đến *sự ổn định*.

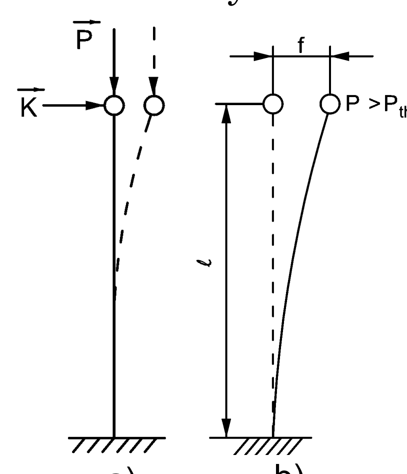
⇒ Khái niệm về ổn định của hệ đàn hồi: Ví dụ, một vật nặng hình cầu đặc trên một mặt lõm (hình 9.1a), quả cầu ở *trạng thái cân bằng ổn định*. Nếu ta đặt quả cầu trên một mặt lồi (hình 9.1b), quả cầu ở *trạng thái cân bằng không ổn định (mất ổn định)*



Hình 9.1

⇒ Xét một thanh thẳng mảnh chịu lực như hình 9.2a. Khi lực $\vec{P}$ còn nhỏ. Nếu ta dùng một lực ngang rất nhỏ $\vec{K}$ đẩy thanh chệch khỏi vị trí cân bằng, thanh trở lại vị trí thẳng đứng ban đầu sau khi bỏ $\vec{K}$. Đó gọi là *trạng thái ổn định* của thanh.

⇒ Nhưng khi lực $\vec{P}$ vượt quá một giới hạn nhất định P_{th} (*tải trọng tới hạn*) thì thanh sẽ dời vị trí cân bằng ban đầu với biến dạng ngày càng tăng ngay cả sau khi lực ngang triệt tiêu, cho đến khi cong hẳn về một phía, không trở về dạng thẳng ban đầu nữa. Lúc này ta nói rằng *trạng thái cân bằng (dưới dạng thẳng) của thanh không ổn định.*



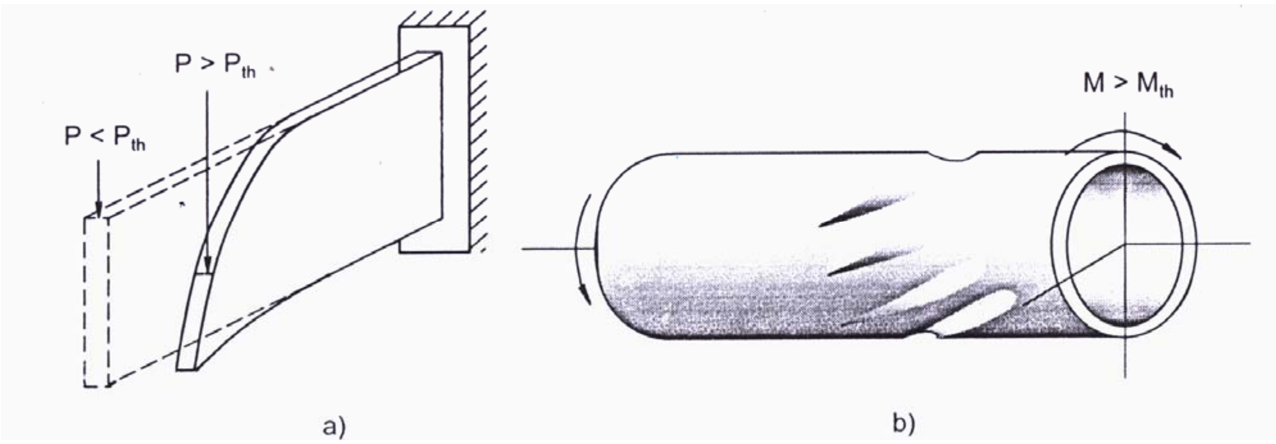
Hình 9.2

⇒ Đối với các chi tiết máy hoặc công trình, ngoài việc bảo đảm an toàn về độ bền và độ cứng còn phải bảo đảm cả ổn định nữa.

Điều kiện ổn định: $\boxed{P \le \dfrac{P_{th}}{n_{ôđ}}}$, $n_{ôđ}$ – hệ số an toàn về ổn định.

Ví dụ một thanh ngàm dài có mặt cắt ngang chữ nhật hẹp (hình 9.3a) bị uốn phẳng bởi lực $\vec{P}$ song song với chiều dài của

mặt cắt, khi $\vec{P}$ lớn hơn lực tới hạn $\vec{P}_{th}$ dễ bị mất ổn định: thanh bị vênh đi và bị uốn – xoắn đồng thời. Một ống tròn mỏng bị xoắn thuần tuý (hình 9.3b) khi mômen xoắn $M > M_{th}$, thành ống sẽ bị méo vì mất ổn định.



Hình 9.3

⇒ Khi mất ổn định, biến dạng của hệ tăng rất nhanh so với mức tăng của tải trọng. Chẳng hạn, với thanh thẳng chịu nén như hình 9.2: khi P=1,010 P_{th} thì f=9%l; P=1,015 P_{th} thì f=22%l.

Bài toán ổn định là *xác định tải trọng tới hạn*. Bài toán đơn giản nhất là xác định lực tới hạn của thanh bị nén đúng tâm (bài toán *uốn dọc* thanh thẳng hay *bài toán Ơle* (Euler).

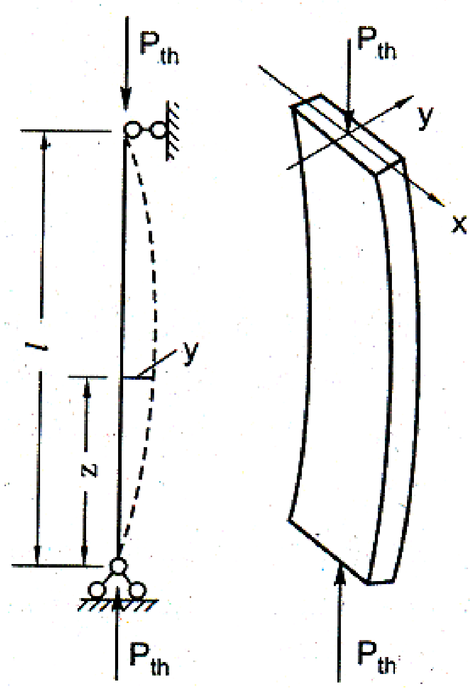
II. BÀI TOÁN ƠLE (EULER, 1774)

1. Công thức Ơle về lực tới hạn

⇒ Xét một thanh thẳng chịu lực nén đúng tâm P. Khi P đạt tới giá trị tới hạn P_{th} thanh sẽ bị uốn cong trong mặt phẳng mà thanh có độ cứng nhỏ nhất (hình 9.4).

⇒ *Giả thiết*: ứng suất trong thanh do P_{th} gây ra chưa vượt giới hạn tỉ lệ (*đàn hồi tuyến tính)*. Dưới tác dụng của P_{th} trục của thanh bị cong với chuyển vị (độ võng) tại mặt cắt có tọa độ z là y(z) rất bé. Mômen uốn trên mặt cắt đó là:

$$M(z) = P_{th} \cdot y(z) \qquad (a)$$



Hình 9.4

⇒ Do các giả thiết trên ta có thể dùng công thức tính mômen uốn theo phương trình vi phân gần đúng đường đàn hồi:

$$M(z) = -EJ\frac{d^2y}{dz^2} \quad \text{(b)}$$

Thay (a) vào (b) ta được: $y''(z) + \alpha^2 y(z) = 0$ (9.1)

trong đó: $\alpha^2 = \dfrac{P_{th}}{EJ}$ (c)

Nghiệm tổng quát của phương trình trên là:

$$y(z) = C_1 \sin\alpha z + C_2 \cos\alpha z$$

Các hằng số tích phân được xác định theo điều kiện biên:

khi z = 0 thì y = 0 (d)

khi z = 1 thì y = 0 (e)

Từ (d) ta có ngay $C_2 = 0$. Từ (e) ta có:

$$y(l) = C_1 \sin\alpha l = 0 \quad \text{(9.2)}$$

Như vậy hoặc $C_1 = 0$ hoặc $\sin\alpha l = 0$. Tuy nhiên vì $C_2 = 0$, nên nếu $C_1 = 0$ thì $y(z) = 0$, khi đó thanh chưa bị uốn cong hay chưa mất ổn định. Vậy chỉ còn lại điều kiện

$$\sin\alpha l = 0 \Rightarrow \alpha l = n\pi\ (n = 1, 2, \ldots) \Rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{l}\ (n = 1, 2, \ldots) \quad \text{(f)}$$

Thay giá trị của α vào (c) ta có giá trị lực tới hạn:

$$\boxed{P_{th} = \frac{n^2\pi^2 EJ}{l^2}} \qquad (n = 1, 2, 3\ldots) \quad \text{(g)}$$

P_{th} là giá trị nhỏ nhất trong các giá trị (g), ứng với n = 1, khi thanh bắt đầu mất ổn định, với độ cứng nhỏ nhất nên J trong (g) nhỏ nhất J_{min} của MCN. Do đó, lực tới hạn bằng:

$$\boxed{P_{th} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{l^2}} \quad \text{(9.3)}$$

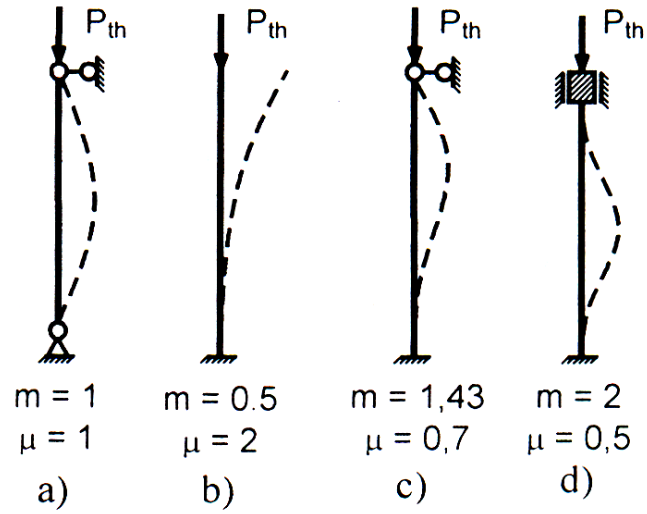
Công thức này do Ơle tìm ra năm 1774.

Đối với các thanh thẳng khác, bằng những suy diễn tương tự như trên, ta được *công thức Euler dưới dạng tổng quát* sau:

$$P_{th} = m^2\frac{\pi^2 EJ_{min}}{l^2} \text{ hay } \boxed{P_{th} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu l)^2}} \quad \text{(9.4)}$$

trong đó μ và $m = \frac{1}{\mu}$ là các hệ số phụ thuộc vào dạng liên kết ở hai mút thanh (hình 9.5).

Có thể thấy m bằng số nửa bước sóng hình sin của đường đàn hồi của thanh sau khi thanh bị mất ổn định.



Hình 9.5

2. Ứng suất tới hạn

Ứng suất tới hạn trong thanh chịu nén đúng tâm bởi lực P_{th}:

$$\sigma_{th} = \frac{P_{th}}{F} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{(\mu l)^2 F} \text{ hay: } \sigma_{th} = \frac{P_{th}}{F} = \frac{\pi^2 E i_{min}^2}{(\mu l)^2}$$

trong đó, $i_{min}^2 = \frac{J_{min}}{F}$ là bán kính quán tính cực tiểu của MCN.

Đặt: $\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}}$ - được gọi là *độ mảnh* của thanh (9.5)

Công thức tính ứng suất tới hạn sẽ có dạng: $\boxed{\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}}$ (9.6)

3. Giới hạn áp dụng của công thức Ơle

⇒ Các công thức Ơle được thành lập với *giả thiết vật liệu đàn hồi tuyến tính* ⇒chúng chỉ dùng khi ứng suất trong thanh nhỏ hơn giới hạn tỉ lệ σ_{tl} ⇒ điều kiện áp dụng các công thức Ơle:

$$\sigma_{th} \le \sigma_{tl} \text{ hay } \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \le \sigma_{tl} \Rightarrow \lambda \ge \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{tl}}} \quad (9.7)$$

⇒ Như vậy công thức Ơle chỉ đúng với các thanh có độ mảnh lớn hơn độ mảnh giới hạn: $\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{tl}}}$ (9.8)

Với thép, $E \approx 2.10^5$ N/mm², σ_{tl} = 200N/mm² ⇒ $\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 .2.10^5}{200}} \approx 100$

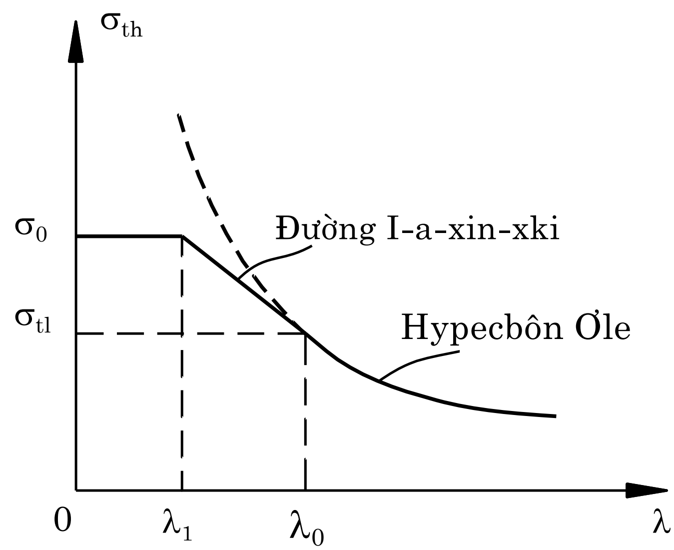
Với gỗ $\lambda_0 \ge 70$, với gang $\lambda_0 \ge 80$.

⇒ Những thanh có độ mảnh $\lambda > \lambda_0$ được gọi là những thanh có *độ mảnh lớn*.

⇒ Những thanh có $\lambda_1 < \lambda < \lambda_0$ được gọi là những thanh có độ *mảnh vừa và bé*.

⇒ Đối với những thanh có độ mảnh vừa và bé, thường dùng công thức kinh nghiệm sau đây của E.S. Yaxinxky:

$$\sigma_{th} = a - b\lambda \qquad (9.9)$$



Hình 9.6

trong đó a và b là các hằng số phụ thuộc vật liệu của thanh, được xác định bằng thực nghiệm và tra *Sổ tay kĩ thuật*. Ví dụ với thép số 3: a = 336 MN/m^2, b = 2,47 MN/m^2, với gỗ: a = 29,3 MN/m^2, b = 0,194 MN/m^2.

Đối với thanh có độ mảnh bé quá ($0 \le \lambda \le \lambda_1$) khi chịu nén thanh không thể bị cong, sự mất ổn định của thanh thực tế không xẩy ra, khi đó trạng thái tới hạn của thanh cũng là trạng thái phá hoại của vật liệu: $\sigma_{th} = \sigma_0$ (9.10)

với $\sigma_0 = \sigma_{ch}$ đối với vật liệu dẻo, $\sigma_0 = \sigma_B$ đối với vật liệu giòn.

III. PHƯƠNG PHÁP THỰC HÀNH ĐỂ TÍNH ỔN ĐỊNH

Như đã biết, điều kiện bền của thanh bị nén đúng tâm là:

$$\sigma_n = \frac{P}{F_{thực}} \le [\sigma]_n = \frac{\sigma_0}{n}$$

trong đó, $[\sigma]_n$ là ứng suất nén cho phép. Trong khi đó điều kiện ổn định của thanh là: $\sigma_{ôđ} = \dfrac{P}{F_{ng}} \le [\sigma]_{ôđ} = \dfrac{P_{th}}{n_{ôđ}}$ (9.11)

trong đó $[\sigma]_{ôđ}$ là ứng suất cho phép về ổn định.

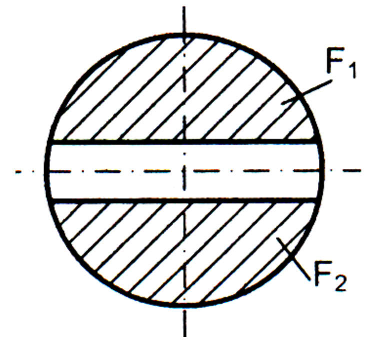
Để tiện cho việc tính toán, ta đặt: $\varphi = \dfrac{[\sigma]_{ôđ}}{[\sigma]_n} = \dfrac{n}{n_{ôđ}} \dfrac{\sigma_{th}}{\sigma_0}$ (9.12)

φ được gọi là *hệ số giảm ứng suất cho phép* hay *hệ số uốn dọc*, $\varphi \le 1$ vì thông thường $[\sigma]_{ôđ} \le [\sigma]_n$. Hệ số φ phụ thuộc vào vật liệu, độ mảnh của thanh và các hệ số an toàn về bền và ổn định. Bằng

thực nghiệm, người ta đã lập được bảng tra trị số φ theo độ mảnh và vật liệu, và cho trong các *Sổ tay kĩ thuật*.

Thay (9.12) và (9.11) suy ra công thức *kiểm tra ổn định* các thanh bị uốn dọc:

$$\frac{P}{F_{ng}} \le \varphi[\sigma]_n \qquad (9.13)$$



Hình 9.7

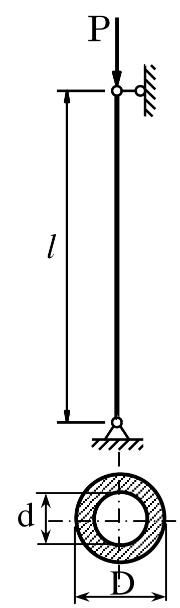
Vì $\varphi \le 1$ nên nếu điều kiện ổn định đã được bảo đảm thì điều kiện bền cũng được đảm bảo. Thực nghiệm cho thấy những lỗ khuyết trên mặt cắt ngang (như lỗ đinh, rãnh chêm, v.v...) ảnh hưởng rất ít đến độ ổn định của thanh, nên khi kiểm tra ổn định theo công thức (9.32) vẫn dùng *diện tích nguyên* của mặt cắt. Hình 9.7 mô tả một MCN bị giảm yếu cục bộ, khi đó $F_{th} = F_1 + F_2$, còn F_{ng} là diện tích của hình tròn.

Từ công thức cơ bản trên, có thể xác định *lực nén cho phép*:

$$[P] \le \varphi F_{ng}[\sigma]_n \qquad (9.14)$$

IV. VÍ DỤ ÁP DỤNG

<u>Ví dụ 9.1</u>. Tính lực tới hạn và ứng suất tới hạn của một thanh chịu nén đúng tâm như hình 9.8. Cho biết vật liệu thanh là đuya-ra: $E = 0.71.10^5$ MN/m^2; σ_{tl}=180 MN/m^2; l = 2 m; D = 4 cm; d = 3 cm.



Hình 9.8

Giải

Mômen quán tính của MCN hình vành khăn là:

$$J = \frac{\pi}{64}\left(D^4 - d^4\right) = \frac{175\pi}{64}\ (\text{cm}^4)$$

Diện tích MCN của thanh: $F = \frac{\pi}{4}\left(D^2 - d^2\right) = \frac{7\pi}{4}\ (\text{cm}^2)$

Bán kính quán tính của mặt cắt ($i_{min} = i_{max} = i$)

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{175\pi.4}{64.7\pi}} = \frac{5}{4}\ (\text{cm})$$

Hệ số liên kết μ = 0,7, do đó độ mảnh của thanh là:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{0,7.120.4}{5} = 67,2$$

Độ mảnh λ_0 tương ứng với σ_{tl} là:

$$\lambda_0 = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_{tl}}} = 3,14\sqrt{\frac{0,71.10^5}{180}} = 62$$

Do $\lambda > \lambda_0$, nên ta áp dụng công thức Ơle để tính lực tới hạn

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2} = 85,3.10^3 N = 85,3kN$$

Ứng suất tới hạn:

$$\sigma_{th} = \frac{P_{th}}{F} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2 F} = 155.10^6 N/m^2 = 155MN/m^2$$

Ví dụ 9.2. Tính lực tới hạn và ứng suất tới hạn của một cột làm bằng thép CT3 chịu liên kết khớp ở hai đầu, MCN hình chữ I số 22a. Xét hai trường hợp:

a) Cột cao 3 m.

b) Cột cao 2,25 m.

Giải

Mặt cắt ngang hình chữ I số 22a có F = 32,4 cm^2 và i_{min} = 2,5cm

a) Khi cột cao 3m độ mảnh của cột là:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{1.3}{0,025} = 120$$

Với thép CT3 ta có $\lambda_0 = 100$ nên ta thấy $\lambda > \lambda_0$, do đó ta có thể sử dụng công thức Ơle.

Ứng suất tới hạn:

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = 14,3kN/cm^2$$

Lực tới hạn của thanh là:

$$P_{th} = \sigma_{th}.F = 14,3.32,4 = 463,32 \text{ kN}$$

b) Khi cột cao 3m độ mảnh của cột là: $\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{1.2,25}{0,025} = 90 < \lambda_0$

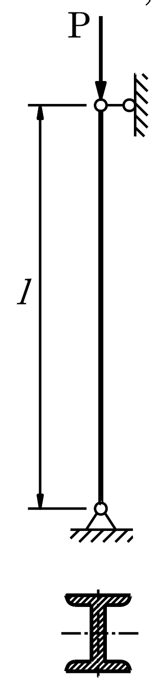
Vì $\lambda < \lambda_0$, nên ta phải dùng công thức Yaxinxki để tính lực tới hạn với thép số 3, ta có:

$$\sigma_{th} = a - b\lambda = 336 - 1,47.90 = 20,4\,kN/cm^2$$

Khi đó lực tới hạn là:

$$P_{th} = \sigma_{th}.\ F = 20,4\ .\ 32,4 = 660\ kN$$

<u>Ví dụ 9.3</u>. Cho cột chữ I làm từ thép số 3. Biết $[\sigma]$=16 kN/cm^2, P=400kN, l=2 m. Xác định số hiệu mặt cắt ngang?



Hình 9.9

Giải

Ta giải bài toán theo phương pháp đúng dần.

a) Chọn lần thứ nhất

Chọn φ_0=0,60

Khi đó $[\sigma]_{ôđ} = \varphi.[\sigma] = 0,6.16 = 9,6$ kN/cm^2.

Diện tích MCN: $F = \frac{P}{[\sigma]_{od}} = \frac{400}{9,6} \approx 41,7\,kN/cm^2$

Tra bảng thép chữ I thấy có loại thép I N^{0}27 có F= 40,2 cm^3; i_{min}=2,54cm.

Độ mảnh của cột là:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{1.200}{2,54} = 78,8$$

Đối với thép số 3, khi λ = 70 thì φ = 0,758, khi λ = 80 thì φ = 0,75. Dùng phương pháp nội suy ta có hệ số φ_1 = $0,75 + \frac{0,81 - 0,75}{10}.1,3$=0,758 tương ứng với λ = 78,8.

Hệ số φ_1 này khác nhiều so với hệ số giảm ứng suất ta chọn lúc đầu nên ta phải chon lần hai.

b) Chọn lầm thứ hai:

Ta lấy: $\varphi_2 = \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} = 0,679;$

Khi đó: $[\sigma]_{ôđ} = \varphi.[\sigma] = 0{,}679.16 = 10{,}86$ kN/cm^2

Diện tích MCN: $F = \dfrac{400}{10{,}86} = 36{,}8\,\text{cm}^2$

Tra bảng ta chọn thép chữ I N^{0}24 có diện tích gần nhất F = 34,8 cm^3; i_{min}=2,37cm.

Độ mảnh của cột: $\lambda = \dfrac{\mu l}{i_{min}} = \dfrac{1.200}{2{,}37} = 84{,}5$

Tra bảng đối với thép số 3 ta có: khi λ = 80 thì φ = 0,75, khi λ = 90 thì φ = 0,69.

Dùng nội suy ta có với λ = 84,5 thì hệ số giảm ứng suất là:

$$\varphi_3 = 0{,}69 + \frac{0{,}75 - 0{,}69}{10}.5{,}5 = 0{,}723;$$

Kiểm tra lại điều kiện ổn định:

Ứng suất cho phép ổn định:

$$[\sigma]_{ôđ} = \varphi_3.[\sigma] = 0{,}723.16 = 11{,}57\ \text{kN/cm}^2$$

Ứng suất thực tế trong cột:

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{400}{34{,}8} = 11{,}5\,\text{kN/cm}^2 \le [\sigma]_{od} = 11{,}57\,\text{kN/cm}^2$$

Ứng suất ít hơn là:

$$\frac{[\sigma] - [\sigma_{ôd}]}{[\sigma_{ôd}]}.100\% = \frac{0{,}07}{11{,}57}.100\% = \approx 0{,}8\%$$

$\Rightarrow$ chọn I N^{0}24 thì cột ổn định.

Vì $\lambda = 84{,}5 < \lambda_0 = 100$, nên theo công thức Yaxinxki ta có:

$$\sigma_{th} = a - b\lambda = 21{,}37\,\text{kN/cm}^2;\ n_{ôd} = \frac{\sigma_{th}}{\sigma_{ôd}} = 1{,}85$$