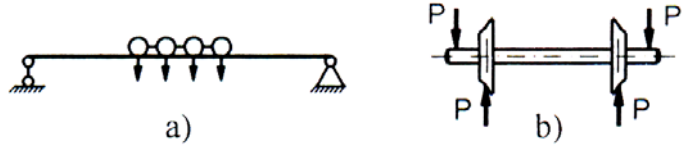


Chương XI. UỐN PHẪNG

I. KHÁI NIỆM VỀ UỐN PHẪNG

1. Khái niệm chung: Một thanh chịu uốn (gọi là *dầm*) khi trục của thanh bị uốn cong dưới tác dụng của ngoại lực, ví dụ dầm cầu, trục bánh xe hỏa, ô tô,.. Hình 6.1 biểu diễn một số dầm chịu uốn.



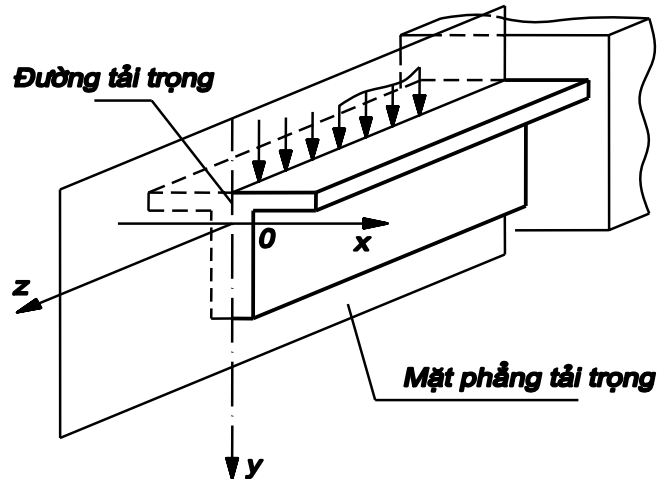
Hình 6.1

⇒ Mặt phẳng chứa các lực và mômen được gọi là *mặt phẳng tải trọng* (hình 6.2).

⇒ *Đường tải trọng* là giao tuyến giữa mặt phẳng tải trọng và MCN của thanh.

⇒ *Mặt phẳng quán tính chính trung tâm* tạo nên bởi trục của thanh và một trục quán tính chính trung tâm của MCN.

⇒ Trục của dầm sau khi bị uốn cong vẫn nằm trong một mặt phẳng quán tính chính trung tâm thì sự uốn đó được gọi là *uốn phẳng*.

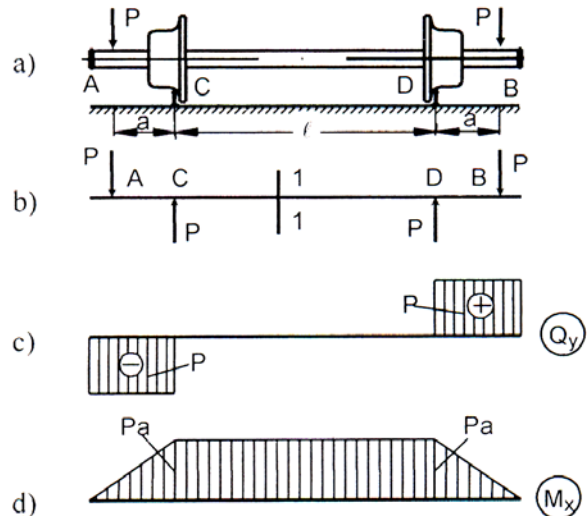


Hình 6.2

2. Phân loại uốn phẳng

⇒ Uốn phẳng chia ra làm hai loại: *uốn thuần túy* và *uốn ngang phẳng*.

⇒ **Uốn thuần túy phẳng:** Trên MCN của dầm chỉ có một thành phần mômen uốn M_x (M_y) nằm trong mặt phẳng quán tính chính trung tâm. Đoạn CD trên hình 6.3 mô tả dầm chịu uốn thuần túy, vì trên MCN của đoạn dầm chỉ có mômen uốn M_x .



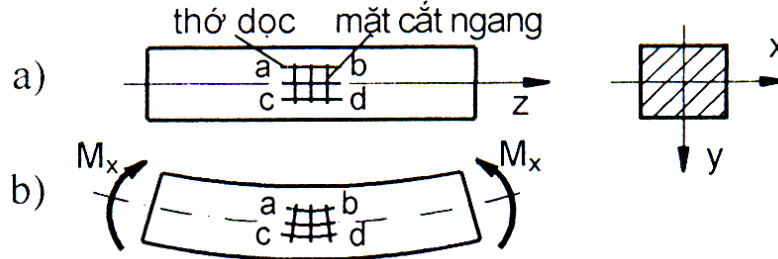
Hình 6.3

⇒ **Uốn ngang phẳng:** Trên MCN của nó có hai thành phần nội lực là lực cắt Q_y và mômen uốn M_x (hoặc Q_x và M_y). Trên hình 6.3, đoạn AC và DB chịu uốn ngang phẳng vì trên các mặt cắt ngang có cả lực cắt Q_y và mômen uốn M_x .

II. DẦM CHỊU UỐN PHẪNG THUẦN TUY

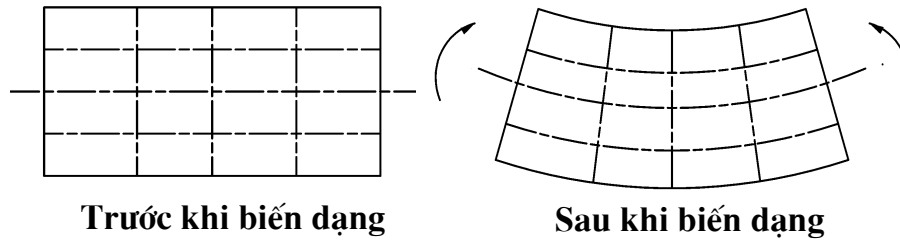
1. Thí nghiệm và các giả thuyết

⇒ Xét một dầm chịu uốn phẳng thuần túy như hình 6.4.



Hình 6.4

⇒ Quan sát một đoạn dầm chịu uốn phẳng thuần túy có MCN hình chữ nhật trước và sau khi biến dạng (hình 6.5).



Hình 6.5

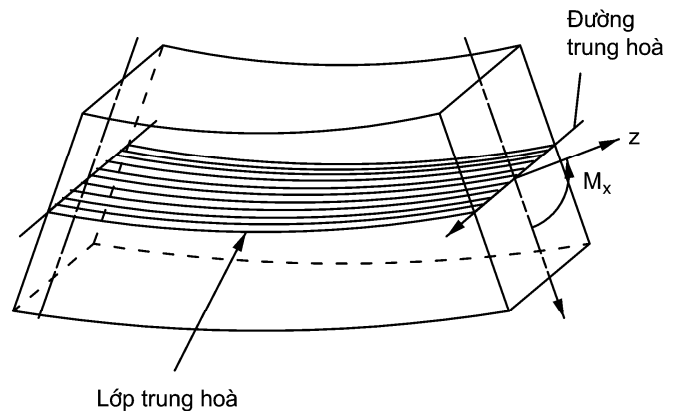
Từ các thí nghiệm dầm chịu uốn phẳng thuần túy ⇒ một số giả thuyết
⇒ *Giả thuyết về MCN phẳng (Bécnu-li)*: MCN của thanh trước và sau biến dạng vẫn phẳng và vuông góc với trục của thanh.

⇒ *Giả thuyết về các thớ dọc*: trong suốt quá trình biến dạng các thớ dọc luôn song song với nhau và song song với trục thanh.

⇒ Ngoài hai giả thuyết trên ta còn giả thuyết về biến dạng bé, MCN hầu như không bị biến dạng.

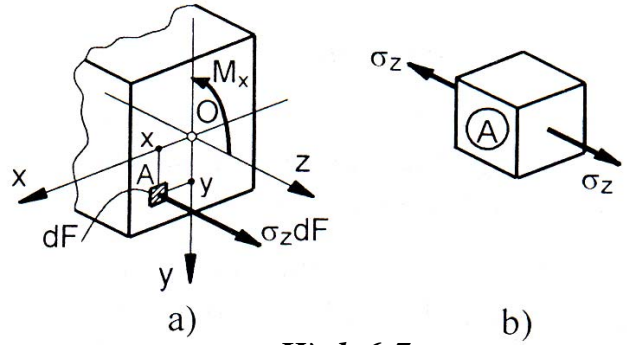
2. Quan hệ biến dạng

⇒ Quan sát biến dạng của dầm chịu uốn phẳng thuần túy như hình 6.4 ta thấy: thớ trên ab bị co lại, thớ dưới cd bị giãn ra. Do đó chắc chắn phải có một thớ không co, không giãn gọi là *thớ trung hoà*. Các thớ trung hoà tạo thành *mặt trung hoà (lớp trung hoà)*. Giao tuyến của mặt trung hoà với MCN gọi là *đường trung hoà (trục trung hoà)* (hình 6-6).



Hình 6.6

⇒ Xét một MCN nào đó và chọn hệ trục tọa độ như hình 6.2 với trục Ox là trục trung hoà. Trên MCN chỉ có ứng suất pháp, không có ứng suất tiếp vì theo giả thuyết về MCN phẳng và với nhận xét các góc vuông sau khi biến dạng vẫn giữ nguyên, nghĩa là trên mặt cắt của phần tử hình hộp được tách ra như ở hình 6-7 không thể có ứng suất tiếp ($\tau = 0$).



Hình 6-7

⇒ Xét đoạn dầm dz được cắt ra bởi hai mặt cắt 1-1 và 2-2.

Vì trục trung hoà không bị biến dạng:

$$O_1O_2 = \Delta z \rightarrow O_1O_2 = \rho \Delta \varphi$$

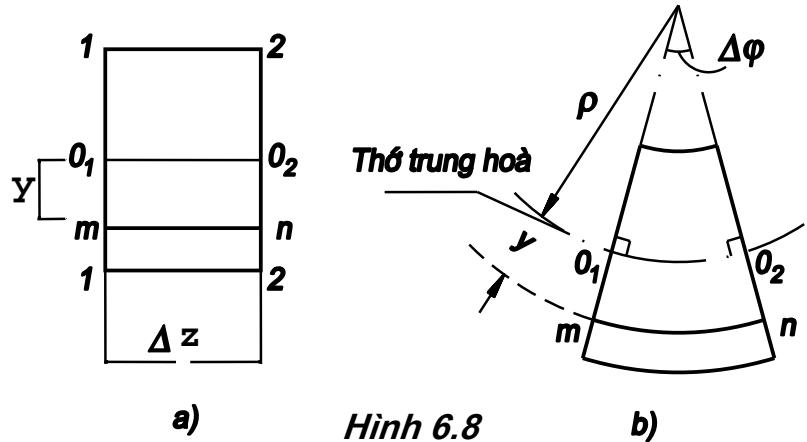
⇒ Xét một thớ mn (hình 6.8): Trước khi biến dạng ta có:

$$mn = \Delta z = \rho \Delta \varphi .$$

Sau khi biến dạng, ta có: $mn = (\rho + y) \Delta \varphi$

⇒ Độ biến dạng dài tỷ đối của thớ mn bằng:

$$\varepsilon_z = \frac{(\rho + y) \Delta \varphi - \rho \Delta \varphi}{\rho \Delta \varphi} = \frac{y}{\rho} \quad (a)$$



Hình 6.8

2. Ứng suất trên MCN

⇒ Theo định luật Húc: $\sigma_z = E \varepsilon_z$ (b)

⇒ Thay (a) vào (b), ta được: $\sigma_z = E \frac{y}{\rho}$ (6-1)

⇒ Trên mọi MCN của uốn phẳng thuần túy thành phần lực dọc $N_z = 0$. Do đó ta có:

$$N_z = \int_F \sigma_z dF = 0 \Rightarrow N_z = \frac{E}{\rho} \int_F y dF = 0 \quad (c)$$

⇒ Đẳng thức trên được thoả mãn, khi: $\int_F y dF = S_x = 0$ (d)

trong đó S_x là mômen tĩnh của MCN đối với trục trung hoà.

⇒ Vậy trục trung hoà là một trục trung tâm của MCN.

Ta có quan hệ giữa mômen uốn M_x và ứng suất pháp σ_z :

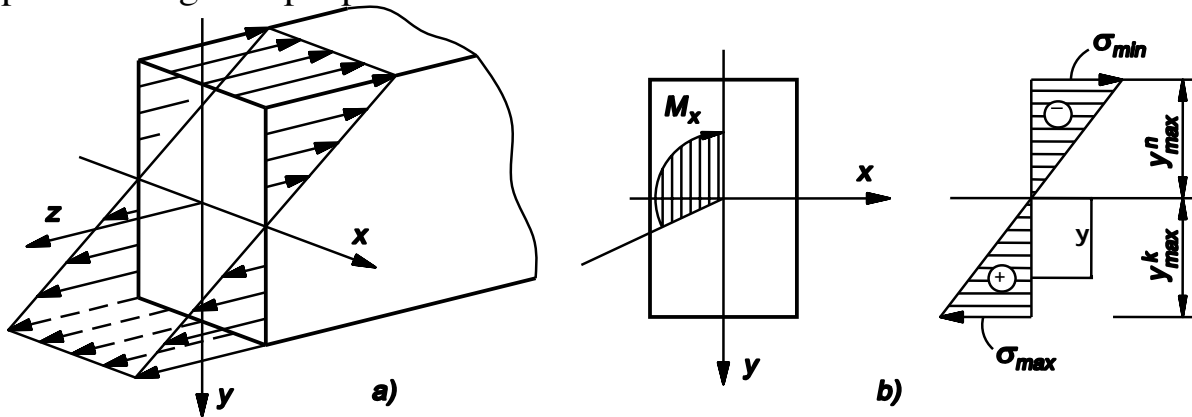
$$M_x = \int_F \sigma_z y dF = \frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF = \frac{E}{\rho} J_x \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x}} \quad (6.2)$$

So sánh (6.1) và (6.2) ta suy ra công thức ứng suất pháp trên MCN:

$$\boxed{\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y} \quad (6.3)$$

3. Biểu đồ ứng suất pháp, ứng suất kéo và nén lớn nhất

\Rightarrow Tại một MCN bán kính ρ có trị số xác định, E là một hằng số. Vậy quy luật phân bố ứng suất pháp trên MCN là phẳng như trên hình 6.5a. Từ công thức (6.2) ta thấy ứng suất pháp là hàm bậc nhất theo y và không phụ thuộc vào x , do đó ta chỉ cần biểu diễn sự biến thiên của σ_z theo chiều cao của MCN (hình 6-9b). Giao tuyến của mặt phẳng ứng suất với MCN chính là trục trung hoà (đường trung hoà). Rõ ràng ứng suất pháp trên các đường thẳng song song với trục trung hoà có trị số như nhau. Do đó ta có thể vẽ biểu đồ phân bố ứng suất pháp như trên hình 6.9b.



Hình 6.9

$\Rightarrow \sigma_z$ có trị số tuyệt đối lớn nhất tại các điểm mép trên hay mép dưới.

\Rightarrow Ứng suất kéo và nén lớn nhất: ta xét hai dạng mặt cắt sau:

a) Nếu trục trung hoà là đối xứng chia đôi chiều cao của mặt cắt ngang, ví dụ MCN là hình chữ nhật, hình tròn, chữ I, ... ta có $y_{\max}^k = y_{\max}^n = y_{\max}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \sigma_{z\max}^k; \quad \sigma_{\min} = \sigma_{z\max}^n \\ \sigma_{\max} &= -\sigma_{\min} = \frac{M_x}{J_x} y_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \end{aligned} \quad (6.5)$$

trong đó: $W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}$ là mômen chống uốn của MCN, thứ nguyên (chiều dài)³.

b) MCN mà đường trung hoà không chia đều chiều cao (hình 6.10):

$$\left| \sigma_z^k \right|_{\max} \neq \left| \sigma_z^n \right|_{\max}$$

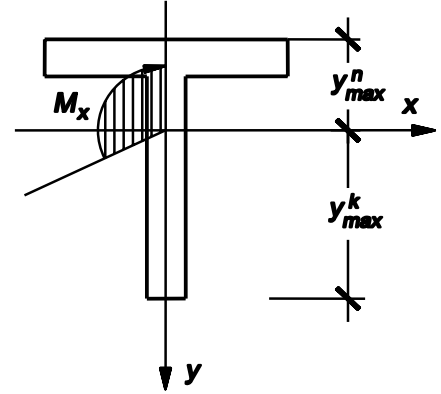
⇒ Kí hiệu khoảng cách hình học (giá trị tuyệt đối) từ điểm xa nhất tới trục trung hoà là y_{\max}^k và y_{\max}^n

⇒ Ứng suất kéo (nén) lớn nhất:

$$\sigma_{\max} = |\sigma_z^k|_{\max} = \frac{|M_x|}{J_x / y_{\max}^k} = \frac{|M_x|}{W_x^k} \quad (6.6)$$

$$\sigma_{\min} = -|\sigma_z^n|_{\max} = -\frac{|M_x|}{J_x / y_{\max}^n} = -\frac{|M_x|}{W_x^n} \quad (6.7)$$

trong đó, đại lượng: $W_x^k = \frac{J_x}{y_{\max}^k}$; $W_x^n = \frac{J_x}{y_{\max}^n}$ là mômen chống uốn khi kéo và khi nén của MCN đối với trục trung hoà.



Hình 6.10

⇒ Mômen chống uốn của vài hình đơn giản:

Hình chữ nhật: $W_x = \frac{J_x}{h/2} = \frac{2bh^3}{12h} = \frac{bh^2}{6}$,

Hình tròn: $W_x = \frac{J_x}{d/2} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3$;

Hình vành khăn: $W_x = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \eta^4) \approx 0,1D^3 (1 - \eta^4)$; $\eta = \frac{d}{D}$

4. Điều kiện bền của dầm chịu uốn phẳng thuần túy

⇒ Dầm làm từ vật liệu dẻo, do khả năng chịu kéo và nén như nhau ($\sigma_{ch}^k = \sigma_{ch}^n$), nên $[\sigma]_k = [\sigma]_n = [\sigma]$.

Theo (6.5), ta có điều kiện bền: $\max |\sigma_z| = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma] \quad (6.13)$

⇒ Dầm làm từ vật liệu giòn, vì $\sigma_{ch}^k \neq \sigma_{ch}^n \Rightarrow$ phải viết 2 điều kiện bền:

$$\max \sigma_z^k = \frac{M_x}{W_x^k} \leq [\sigma]_k \quad (6.14); \quad \min \sigma_z^n = \frac{M_x}{W_x^n} \leq [\sigma]_n \quad (6.15)$$

⇒ Tìm vị trí MCN có ứng suất pháp lớn nhất. Nếu dầm có MCN không thay đổi và vật liệu của dầm là dẻo thì lấy ở MCN có mômen uốn lớn nhất. Trường hợp dầm có MCN thay đổi ta phải lấy MCN có ứng suất pháp lớn nhất. Trường hợp dầm làm bằng vật liệu giòn ta phải tìm MCN thoả mãn các biểu thức (6.14), (6.15) (kéo - nén).

5. Hình dạng hợp lý của MCN

Hình dạng hợp lý của MCN là hình dáng sao cho với cùng một tải trọng cho trước thì dầm cấu tạo tốn ít vật liệu nhất hoặc cùng khối lượng vật liệu, khả năng chịu lực của dầm là lớn nhất.

⇒ Nếu dầm làm bằng vật liệu dẻo thì MCN phải đối xứng qua đường trung hoà, vì $[\sigma]_k = [\sigma]_n$ nên $y_{\max}^k = y_{\max}^n$.

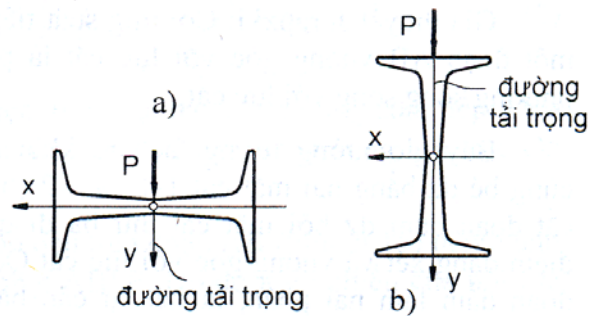
⇒ Nếu dầm làm bằng vật liệu giòn thì MCN phải thoả mãn điều kiện:

$$\frac{|y_{\max}^k|}{|y_{\max}^n|} = \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n}$$

Đối với vật liệu giòn $[\sigma]_k < [\sigma]_n$ do đó $|y_{\max}^k| < |y_{\max}^n|$.

Như vậy đối với dầm làm bằng vật liệu giòn thì MCN hợp lý có dạng không đối xứng qua trục trung hoà, chẳng hạn MCN chữ T, hình tam giác, ...

⇒ **Bố trí mặt cắt ngang**: Qua biểu đồ ứng suất pháp trên MCN của dầm chịu uốn như trên hình 6.9 ta thấy ở những điểm càng gần trục trung hoà thì ứng suất pháp càng nhỏ, nghĩa là tại những chỗ đó vật liệu chịu tải rất ít. Để tận dụng khả năng làm việc của vật liệu người ta thường bố trí MCN chữ T, I, [, ... Ngoài ra việc bố trí định hướng mặt cắt đối với mặt phẳng tải trọng cũng có ý nghĩa rất lớn. Ví dụ MCN chữ I bố trí làm sao trục trung hoà trùng với một trục (x chẳng hạn) mà đối với trục đó $J_x = J_{\max}$ (hình 6.11).



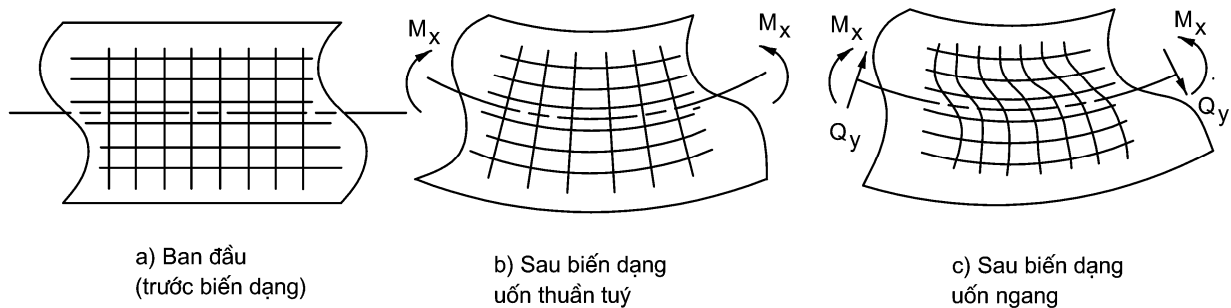
Hình 6.11. Bố trí MCN
a) không hợp lý; b) hợp lý

⇒ Điều kiện dầm có **độ bền đều**: $|\sigma_{z\max}|^k = |\sigma_{z\max}|^n$

III. DẦM CHỊU UỐN NGANG PHẪNG

1. Định nghĩa

⇒ Dầm chịu uốn ngang phẳng khi trên MCN của dầm ngoài thành phần mômen uốn M còn có thành phần lực cắt Q . Các thành phần đó nằm trong mặt phẳng đối xứng của dầm.



Hình 6.12

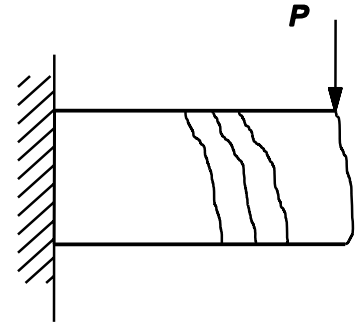
Với dầm chịu uốn ngang phẳng: thành phần ứng suất pháp do mômen uốn và ứng suất tiếp do lực cắt gây ra. Hình 6.12 mô tả hiện tượng uốn ngang (trục bị uốn cong), làm cho các MCN ban đầu không còn phẳng nữa mà bị vênh đi trong quá trình biến dạng. Điều này chứng tỏ trên MCN của dầm đã xuất hiện ứng suất tiếp.

1. Ứng suất pháp

Trong uốn phẳng, lực cắt \Rightarrow ứng suất tiếp. Các ứng suất tiếp phân bố theo chiều cao mặt cắt không đều. Do ảnh hưởng đó, các biến dạng góc cũng có trị số thay đổi theo chiều cao của MCN làm cho mặt cắt sau khi bị uốn không còn phẳng nữa mà hơi bị vênh theo chữ S (hình 6.13).

Nếu lực cắt bằng hằng số thì MCN đều vênh như nhau \Rightarrow sự vênh không ảnh hưởng đến độ dẫn hoặc độ co \Rightarrow công thức tính ứng suất pháp (6.2) vẫn còn đúng

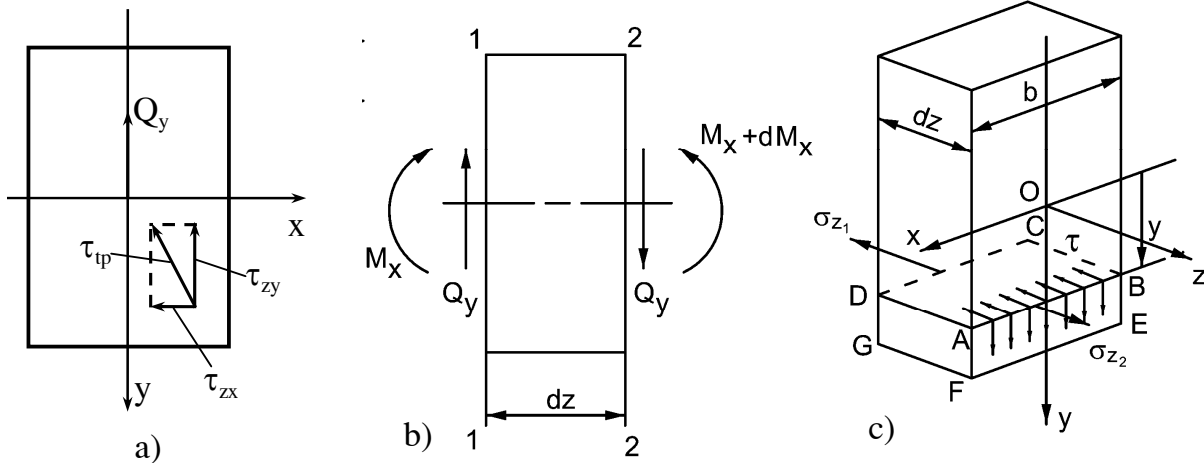
trong trường hợp uốn ngang phẳng:
$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y$$



Hình 6.13

2. Ứng suất tiếp

\Rightarrow Xét MCN hình chữ nhật: ứng suất tiếp trên MCN là τ_{zx} và τ_{zy} (hình 6.14a). Theo định luật đối xứng ứng suất tiếp (mặt ngoài dầm không chịu ngoại lực theo phương z) $\Rightarrow \tau_{zx} = 0$, có nghĩa tại điểm xét có $\tau = \tau_{zy}$.



Hình 6.14

Từ lý thuyết đàn hồi (giả thuyết Jurapxki) ta có: tất cả các ứng suất tiếp trên MCN đều // với lực cắt và ứng suất tiếp phân bố đều theo chiều rộng của MCN.

\Rightarrow Tách từ dầm một đoạn có chiều dài dz (hình 6.14b, c), sau đó bằng mặt cắt ABCD song song và cách mặt phẳng Oxz một khoảng y chia đoạn thanh này thành hai phần và xét phần không chứa gốc O (ABCDEFGH).

\Rightarrow Gọi σ_{z_1} và σ_{z_2} là ứng suất pháp trên các mặt cắt 1-1 và 2-2, $b(y) = AB$ và

F_c là diện tích của mặt cắt ABEF, b^c chiều rộng của phần diện tích đó tại điểm cách trục trung hoà y . Có thể thấy:

$$\sigma_{z_1} = \frac{M_x}{J_x} y; \quad \sigma_{z_2} = \frac{M_x + dM_x}{J_x} y \quad (a)$$

\Rightarrow Xét sự cân bằng phân tố phần dưới, ta có:

$$\sum F_z = \int_{F_c} \sigma_{z_1} dF - \int_{F_c} \sigma_{z_2} dF + \tau_{yz} \cdot b_c \cdot dz = 0 \quad (b)$$

\Rightarrow Thay (a) vào (b) và chú ý rằng $\frac{dM_x}{dz} = Q_y$, ta có:

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = \int_{F_c} \frac{Q_y \cdot y}{J_x b^c} dF$$

$$\Rightarrow \tau_{zy} = \frac{Q_y}{J_x b^c} \int_{F_c} y dF = \frac{Q_y \cdot S_x^c}{J_x b^c} \quad (6.16)$$

trong đó $S_x^c(y)$ là mômen tĩnh của diện tích F_c đối với trục trung hoà x . Với mặt cắt là dải chữ nhật hẹp:

$$S_x^c = \xi F_c \quad (6.17)$$

ξ - toạ độ trọng tâm phần tiết diện bị cắt đối với trục trung hoà.

\Rightarrow Công thức (6.16) được gọi là *công thức Juravski* (1855).

3. Ứng suất tiếp của một số mặt cắt đơn giản

a) MCN hình chữ nhật (hình 6.15): Ta có:

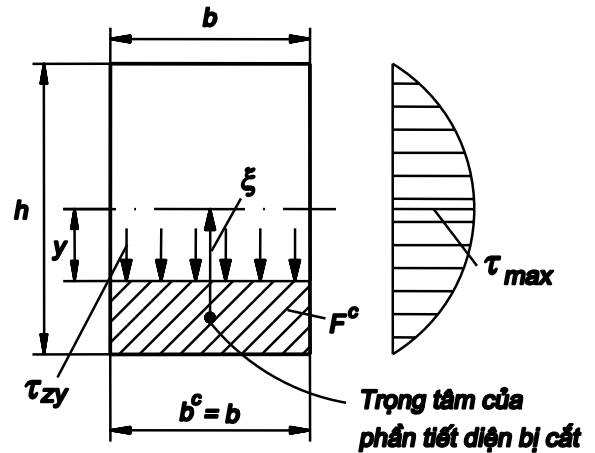
$$S_x^c = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right); J_x = \frac{bh^3}{12}; b^c = b$$

$$\Rightarrow \tau_{zy} = \frac{3Q_y}{2bh} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right)$$

\Rightarrow Biểu đồ phân bố ứng suất tiếp trên MCN (hình 6.15):

$\Rightarrow \tau_{\max}$ tại các điểm trên trục trung hoà:

$$\tau_{\max} = \frac{3Q_y}{2bh} = \frac{3Q_y}{2F}$$



Hình 6.15 (6.18)

b) MCN hình tròn

$$J_x = \frac{\pi R^4}{4}; \quad b^c = 2\sqrt{R^2 - y^2}; \quad S_x^c = \frac{2}{3}(R^2 - y^2)^{3/2} \left\} \Rightarrow \tau_{zy} = \frac{4Q_y}{3\pi R^4}(R^2 - y^2)\right.$$

⇒ Biểu đồ phân bố ứng suất tiếp trên MCN cho trên hình 6.16:

$$\tau_{\max} = \frac{4Q_y}{3\pi R^2} = \frac{4}{3} \frac{Q_y}{F} \quad (6.19)$$

c) MCN chữ I (hình 6.17):

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y [S_x - dy^2 / 2]}{J_x \cdot d}$$

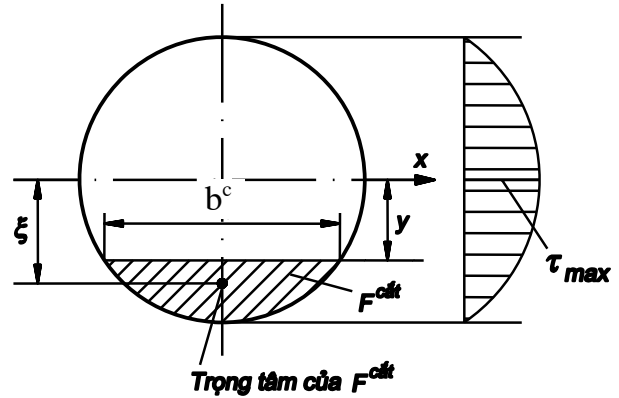
$$\Rightarrow \tau_{zy}^{\max} = \frac{Q_y S_x}{J_x \cdot d}$$

($S_x^c = S_x - d \cdot y \cdot \frac{y}{2}$ với S_x là mômen tĩnh một nửa chữ I)

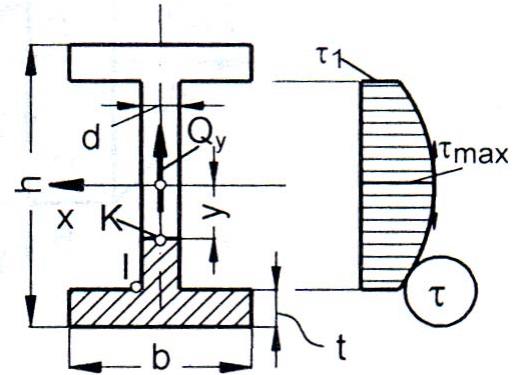
$$\Rightarrow \text{Tại điểm K: } \tau_1 = \frac{Q_y \left[S_x - \frac{d}{2} \left(\frac{h}{2} - t \right)^2 \right]}{J_x \cdot d}$$

$$\Rightarrow \text{Tại điểm ở đế I: } \tau_2 = \frac{Q_y \left[S_x - \frac{d}{2} \left(\frac{h}{2} - t \right)^2 \right]}{J_x \cdot b}$$

⇒ Do $d < b$ nên $\tau_1 > \tau_2$ nên khi kiểm tra bền chỉ chú ý đến τ_{zy}^{\max} và τ_1 .



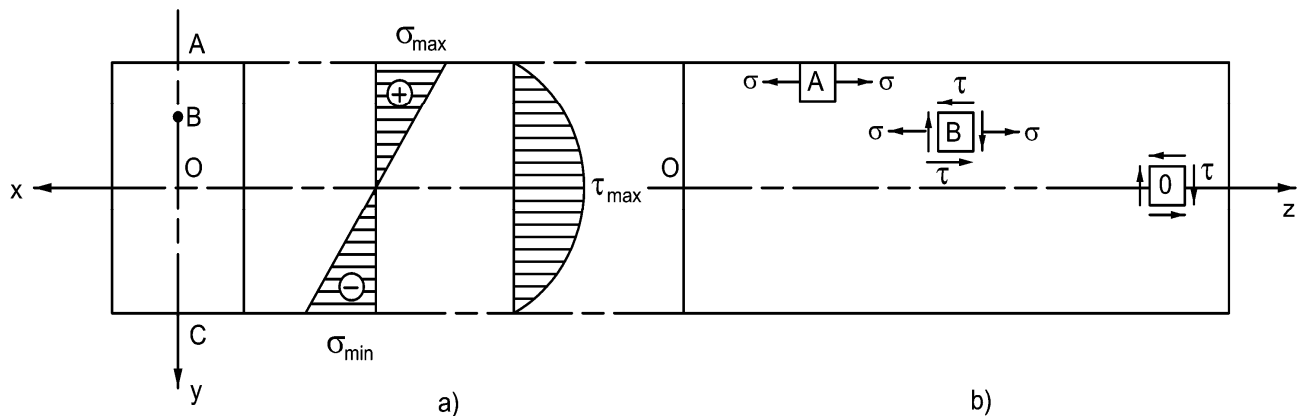
Hình 6.16



Hình 6.17

4. Điều kiện bền của dầm chịu uốn ngang phẳng

⇒ Đối với dầm chịu uốn ngang phẳng, việc tìm vị trí điểm nguy hiểm và viết điều kiện bền có phức tạp hơn. Dựa vào biểu đồ phân bố ứng suất pháp và tiếp, dọc theo chiều cao ta thấy trên hình 6.18a.



Hình 6.18

• *Trạng thái ứng suất đơn* ở các điểm ngoài mép xa trục trung hoà nhất - điểm A (C):

$$\Rightarrow \text{Điều kiện đối với vật dẻo: } \max |\sigma_z| = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma] \quad (6.20)$$

$$\Rightarrow \text{Vật liệu giòn: } \max \sigma_z^k = \frac{M_x}{W_x^k} \leq [\sigma]_k; \quad \max |\sigma_z^n| = \frac{M_x}{W_x^n} \leq [\sigma]_n \quad (6.21)$$

• *Trạng thái ứng suất trượt thuần túy* ở những điểm trên trục trung hoà - điểm O (hình 6.18b):

$$\max \tau \leq [\tau] \quad (6.22)$$

• *Trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt*: điểm nguy hiểm (điểm B) là những điểm nằm giữa trục trung hoà và mép ngoài cùng của MCN, nên điểm nguy hiểm trên mặt cắt phải chọn sao cho cả σ và τ cùng đồng thời lớn. Ví dụ MCN chữ I thì điểm nguy hiểm là điểm tiếp giáp giữa lòng và đế.

Mặt cắt nguy hiểm: dựa vào biểu đồ lực cắt (Q_y) và mômen uốn (M_x), ta phải chọn một hoặc một số mặt cắt có M_x và Q_y cùng đồng thời lớn.

$$\text{Điều kiện bền: đưa về ứng suất tương đương } \sigma_{td}: \max \sigma_{td} \leq [\sigma] \quad (6.23)$$

$$\Rightarrow \text{Ví dụ theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất, ứng suất tính toán tương đương tại điểm B, có dạng: } \sigma_{td(B)} = \sqrt{\sigma_{z(B)}^2 + 4\tau_{zy(B)}^2} \quad (6.24)$$

5. Các dạng bài toán cơ bản:

\Rightarrow Bài toán kiểm tra bền: kiểm tra cả ba loại trạng thái ứng suất như trên.

\Rightarrow Xác định tải trọng cho phép.

\Rightarrow Chọn kích thước của MCN

Trình tự khi chọn kích thước MCN hoặc xác định tải trọng cho phép: đầu tiên ta xuất phát từ điều kiện bền của phân tố ở trạng thái ứng suất đơn (điểm A hoặc C) theo công thức (6.20), (6.21) để chọn sơ bộ tải trọng hoặc kích thước MCN. Sau đó ta kiểm tra điều kiện bền đối với các phân tố còn lại (trượt thuần túy và trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt).

6. Điều kiện cứng của dầm chịu uốn phẳng

\Rightarrow Khi chế tạo các bộ phận của công trình (cầu, dầm chịu lực của các toà nhà, ...) \Rightarrow cần kiểm tra xem biến dạng lớn nhất của kết cấu không được vượt quá giá trị cho phép được quy định bởi yêu cầu của thiết kế.

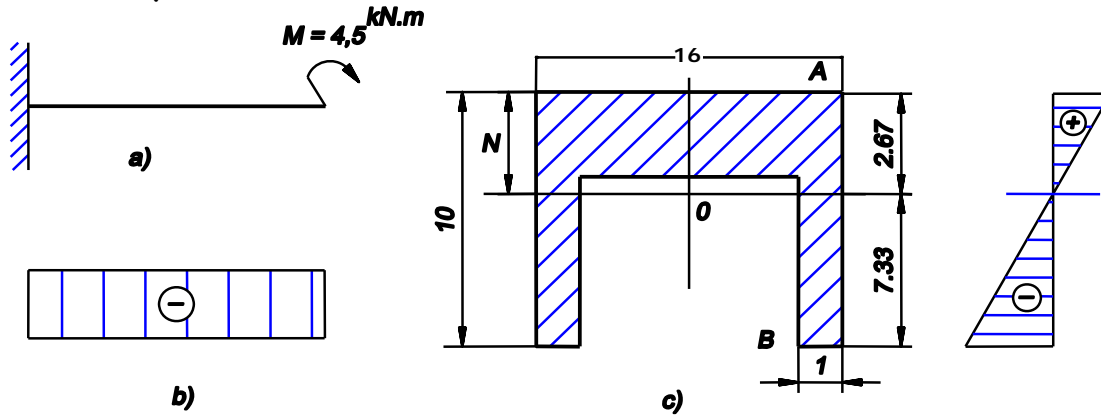
$$\Rightarrow \text{Biến dạng lớn nhất đó là: } \frac{y_{\max}}{l} \leq [f]; \quad \frac{\varphi_{\max}}{l} \leq [\theta]$$

trong đó y_{\max} ; φ_{\max} là độ võng và góc xoay lớn nhất của dầm; l là chiều dài của dầm. $[f]$ là giá trị cho phép của độ võng trên một đơn vị dài. $[\theta]$ là giá trị cho phép của góc xoay trên một đơn vị dài.

7. Ví dụ áp dụng

Ví dụ 6.1: Một dầm bằng vật liệu có ứng suất pháp cho phép khi kéo $[\sigma]_k = 3,5 \text{ kN/cm}^2$ và nén $[\sigma]_n = 11 \text{ kN/cm}^2$, chịu lực như trên hình 6.19a.

Kiểm tra độ bền của dầm.



Hình 6.19

Bài giải: Trình tự các bước thực hiện

- Vẽ biểu đồ mômen uốn, cho trị số $\max M_x = 4,5 \text{ kN.m}$
- Tìm các đặc trưng cần thiết của MCN (hình 6.19c), ta được các trị số:

$$J_x = 370 \text{ cm}^4; y_{\max}^k = 2,67 \text{ cm}; y_{\max}^n = 7,33 \text{ cm}$$

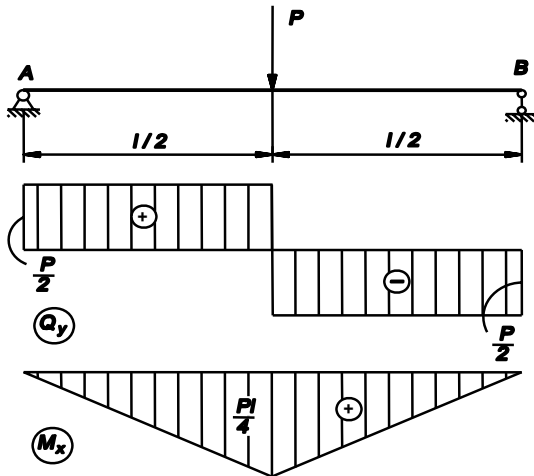
- Tính các giá trị $\max \sigma_z^k; \max \sigma_z^n$:

$$\max \sigma_z^k = \sigma_A = \frac{M_x}{J_x} y_{\max}^k = 3,25 \text{ kN/cm}^2 \leq [\sigma]_k;$$

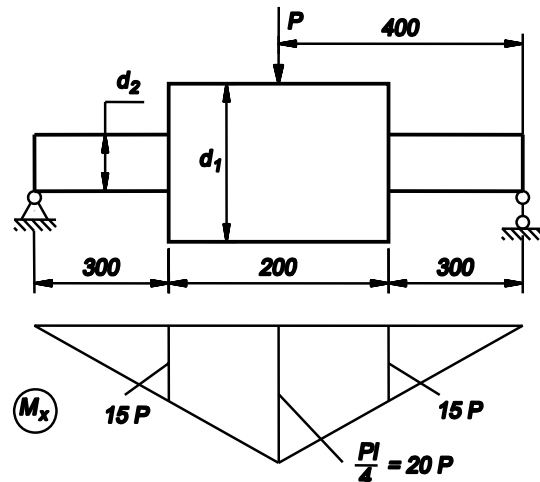
$$\max \sigma_z^n = \sigma_B = \frac{M_x}{J_x} y_{\max}^n = 8,92 \text{ kN/cm}^2 \leq [\sigma]_n$$

Vậy dầm đủ bền.

Ví dụ 6.2: Cho dầm chịu lực như trên hình 6.20. Chọn đường kính của dầm cho hai trường hợp: dầm có MCN không đổi, dầm có ba bậc như hình 6.21. Biết $l=80 \text{ cm}$, $P=5 \text{ kN}$, $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$, $[\tau] = 8 \text{ kN/cm}^2$.



Hình 6.20



Hình 6.21

Bài giải

- Dầm có MCN không đổi. Theo điều kiện bền cơ bản (6.13), ta có:

$$0,1d^3 \geq M_{x\max} / [\sigma]$$

trong đó: $M_{x\max} = 5.80 / 4 = 10^2 \text{ kN.cm} \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{10^2 / (0,1.16)} = 4 \text{ cm}$

- Dầm ba bậc (hình 6.21). Trị số d_1, d_2 được xác định theo công thức (6.20)

Đối với đoạn giữa: $\max M_x = 10^2 \text{ kNcm}$

Đối với đoạn hai đầu: $M_x = 30.P / 2 = 30.5 / 2 = 75 \text{ kNcm}$

Từ điều kiện bền cơ bản (6.13), ta có:

$$0,1d_1^3 \geq \frac{10^2}{16} \rightarrow d_1 = 4 \text{ cm}; \quad 0,1d_2^3 \geq \frac{75}{16} \rightarrow d_2 = 3,6 \text{ cm}$$

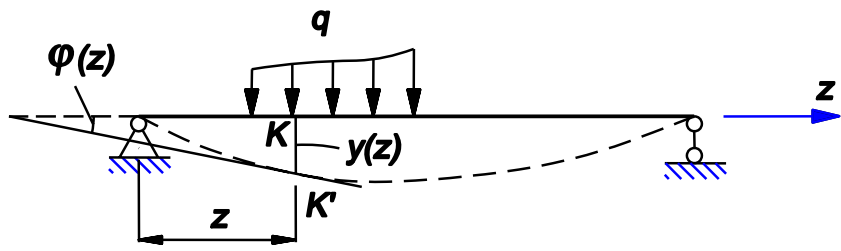
Với kích thước đã chọn dầm làm việc đủ bền.

IV. CHUYỂN VỊ CỦA DẦM CHỊU UỐN

1. Đường đàn hồi, độ võng và góc xoay

\Rightarrow Khi dầm chịu uốn phẳng, trục của dầm bị uốn cong gọi là *đường đàn hồi* (hình 6.22).

\Rightarrow Chuyển vị đứng của MCN tại K gọi là **độ võng** $y(z)$ của dầm.



Hình 6.22

\Rightarrow Góc lập bởi tiếp tuyến với đường đàn hồi tại điểm K' và trục của dầm trước khi biến dạng gọi là **góc xoay** $\varphi(z)$.

2. Phương trình vi phân gần đúng của đường đàn hồi

\Rightarrow Từ (6.2) ta có bán kính cong ρ của đường đàn hồi được xác định bởi công thức:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x} \quad (a)$$

\Rightarrow Mặt khác ta có:

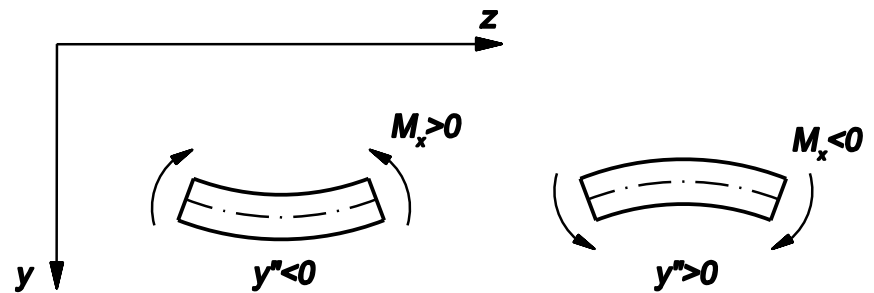
$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \quad (b)$$

\Rightarrow Từ (a) và (b) suy

$$\text{ra: } y''(z) = -\frac{M_x}{EJ_x}$$

$$(6.28)$$

\Rightarrow Dấu “-” do mô men uốn ($y'^2 \approx 0$ do biến dạng là vô cùng bé) và độ lồi (lõm) của dầm là trái dấu nhau (hình 6.23).



Hình 6.23

2. Phương pháp tích phân không định hạn tính độ võng, góc xoay

⇒ Muốn tính góc xoay và độ võng tại mặt cắt bất kỳ của dầm, ta lần lượt tích phân phương trình (6.28) hai lần:

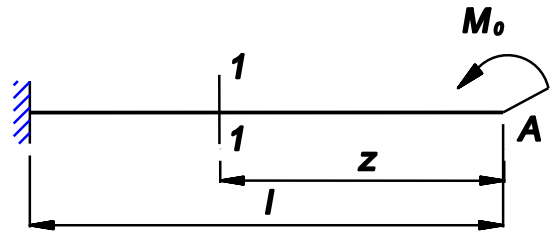
$$y'(z) = \varphi(z) = -\int \frac{M_x}{EJ_x} dz + C_1 \quad (6.29)$$

$$y(z) = -\int \left(\int \frac{M_x}{EJ_x} dz \right) dz + C_1 z + C_2 \quad (6.30)$$

⇒ Các hằng số tích phân C_1 và C_2 xác định từ các điều kiện biên tại các mặt cắt đặt liên kết và điều kiện liên tục của độ võng và góc xoay tại vị trí tiếp giáp giữa các đoạn dầm.

Ví dụ 6.3: Xét dầm công-xôn chịu mômen uốn M_0 tại đầu tự do (hình 6.24), biết độ cứng của dầm $EJ_x = \text{const}$. Tính độ võng và góc xoay tại điểm A.

Bài giải: Xét mặt cắt 1-1, ta có: $M_x = M_0$
Thay vào (6.28) và tích phân lần lượt hai lần ta được:



Hình 6.24

$$y'' = -\frac{M_0}{EJ_x}; \quad y' = -\frac{M_0}{EJ_x} z + C_1; \quad y = -\frac{M_0}{2EJ_x} z^2 + C_1 z + C_2$$

$$\text{Điều kiện biên: } z = l: \begin{cases} y(l) = 0 \\ y'(l) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{M_0 l}{EJ_x} \\ C_2 = -\frac{M_0 l^2}{2EJ_x} \end{cases}$$

$$\text{Vậy độ võng, góc xoay tại A là: } y(0) = -\frac{M_0 l^2}{2EJ_x}; \quad \varphi_A = y'(0) = \frac{M_0 l}{EJ_x}$$

Dấu “-” chứng tỏ điểm A chuyển vị lên trên, ngược chiều dương của trục y. Góc xoay tại A quay ngược chiều kim đồng hồ.

3. Phương pháp hàm gián đoạn

⇒ Phương pháp hàm gián đoạn cho phép biểu diễn mômen uốn thành biểu thức duy nhất trên toàn chiều dài của dầm, và chỉ có 2 hằng số tích phân xác định từ điều kiện biên ⇒ việc tính toán độ võng góc xoay tại mặt cắt bất kỳ trên toàn dầm được đơn giản hoá rất nhiều ⇒ có thể áp dụng tin học hoá.

⇒ Hàm gián đoạn được định nghĩa như sau:

$$\langle x - a \rangle^n = \begin{cases} (x - a)^n & \text{khi } x \geq a \\ 0 & \text{khi } x < a \end{cases} \quad \text{với } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n \geq 0, a = \text{const} \in \mathbb{R}.$$

⇒ Có nghĩa là hàm gián đoạn chỉ có giá trị khác 0 khi đối số là không âm. Khi đó các dấu ngoặc nhọn có thể coi như dấu ngoặc tròn thông thường. Còn khi đối số âm thì hàm gián đoạn bằng 0.

⇒ Từ định nghĩa hàm gián đoạn ta có tính chất sau:

$$\frac{d}{dx} \langle x-a \rangle^n = n \cdot \langle x-a \rangle^{n-1} ; \quad \int \langle x-a \rangle^n dx = \frac{\langle x-a \rangle^{n+1}}{n+1} + C$$

⇒ Sử dụng hàm gián đoạn ta có thể biểu diễn mômen uốn của dầm đối với các loại tải trọng khác nhau:

a) Mô men tập trung

$$M_x = -M_0 \cdot \langle z-a \rangle^0$$

Dấu “-” vì mô men uốn làm căng thớt trên.

b) Lực tập trung

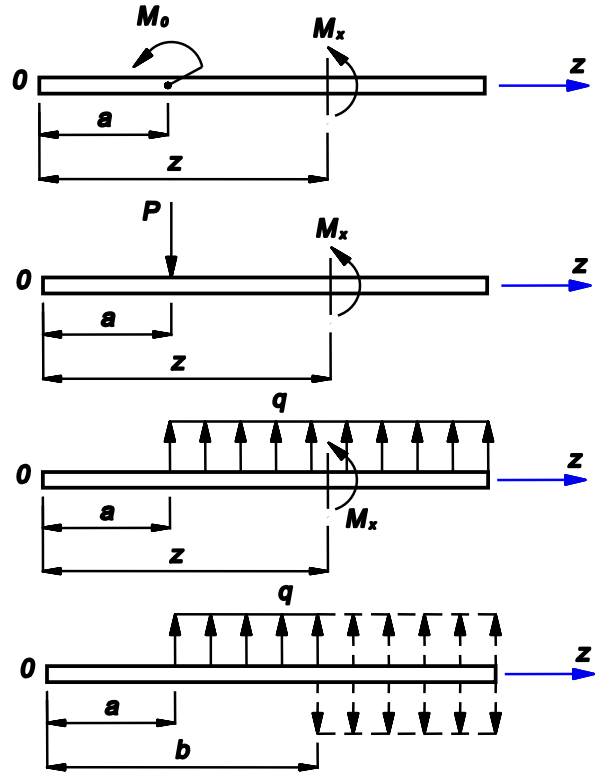
$$M_x = -P \cdot \langle z-a \rangle^1$$

c) Lực phân bố đều đến hết chiều dài dầm:

$$M_x = \frac{q \cdot \langle z-a \rangle^2}{2}$$

d) Lực phân bố đều trên một đoạn của dầm

$$M_x = \frac{q \cdot \langle z-a \rangle^2}{2} - \frac{q \cdot \langle z-b \rangle^2}{2}$$



⇒ Áp dụng nguyên lý cộng tác tác dụng ta sẽ viết được biểu thức mômen uốn cho dầm với tác dụng đồng thời của nhiều tải trọng khác nhau. Thay biểu thức của M_x vào (6.28) vào tích phân lần lượt hai lần giống như phương pháp tích phân không định hạn ta sẽ thu được độ võng, góc xoay tại mặt cắt bất kỳ. Hai hằng số tích phân được xác định từ các điều kiện liên kết của dầm.

Ví dụ 6.4: Từ hình 6.24 ta có (chọn gốc tọa độ tại A): $M_x = M_0 \cdot \langle z-0 \rangle^0$

$$y'' = -\frac{M_0 \cdot \langle z-0 \rangle^0}{EJ_x} ; \quad y' = -\frac{M_0 \cdot \langle z-0 \rangle^1}{EJ_x} + C_1 ; \quad y = -\frac{M_0 \cdot \langle z-0 \rangle^2}{2EJ_x} + C_1 z + C_2$$

$$\text{Điều kiện biên: } z=l: \begin{cases} y(l)=0 \\ y'(l)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{M_0 l}{EJ_x} \\ C_2 = \frac{M_0 l^2}{2EJ_x} - \frac{M_0 l^2}{EJ_x} = -\frac{M_0 l^2}{2EJ_x} \end{cases}$$

$$\text{Vậy độ võng, góc xoay tại A là: } y_A = y(0) = -\frac{M_0 l^2}{2EJ_x} ; \quad \varphi_A = y'(0) = \frac{M_0 l}{EJ_x}$$

Kết quả giống như phương pháp tích phân không định hạn.

Ví dụ 6.7: Tính độ võng, góc xoay tại điểm giữa của dầm.

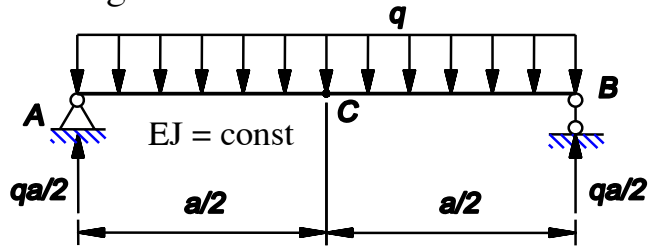
Từ hình 6.25, ta có:

$$M_x = \frac{q \cdot a}{2} \langle z-0 \rangle^1 - \frac{q}{2} \langle z-0 \rangle^2$$

$$EJ_x \cdot y'' = -\frac{q \cdot a}{2} \langle z-0 \rangle^1 + \frac{q}{2} \langle z-0 \rangle^2$$

$$EJ_x \cdot y' = -\frac{q \cdot a}{4} \langle z-0 \rangle^2 + \frac{q}{6} \langle z-0 \rangle^3 + C_1$$

$$EJ_x \cdot y = -\frac{q \cdot a}{12} \langle z-0 \rangle^3 + \frac{q}{24} \langle z-0 \rangle^4 + C_1 \cdot z + C_2$$



Hình 6.25

Điều kiện biên:

$$\begin{cases} z=0: y(0)=0 \\ z=a: y(a)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{qa^3}{24} \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

Vậy độ võng và góc xoay tại C:

$$y_C = y\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{5qa^4}{384EJ_x};$$

$$\varphi_C = y'\left(\frac{a}{2}\right) = 0$$

4. Phương pháp tải trọng giả tạo (phương pháp đồ toán)

⇒ Liên hệ vi phân giữa nội lực và ngoại lực như sau:

$$\frac{d^2 M_x(z)}{dz^2} = \frac{dQ_y(z)}{dz} = q(z)$$

⇒ Còn đối với phương trình đường đàn hồi, ta có phương trình vi phân:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = -\frac{M_x}{EJ_x} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{dy'}{dz} = -\frac{M_x}{EJ_x}$$

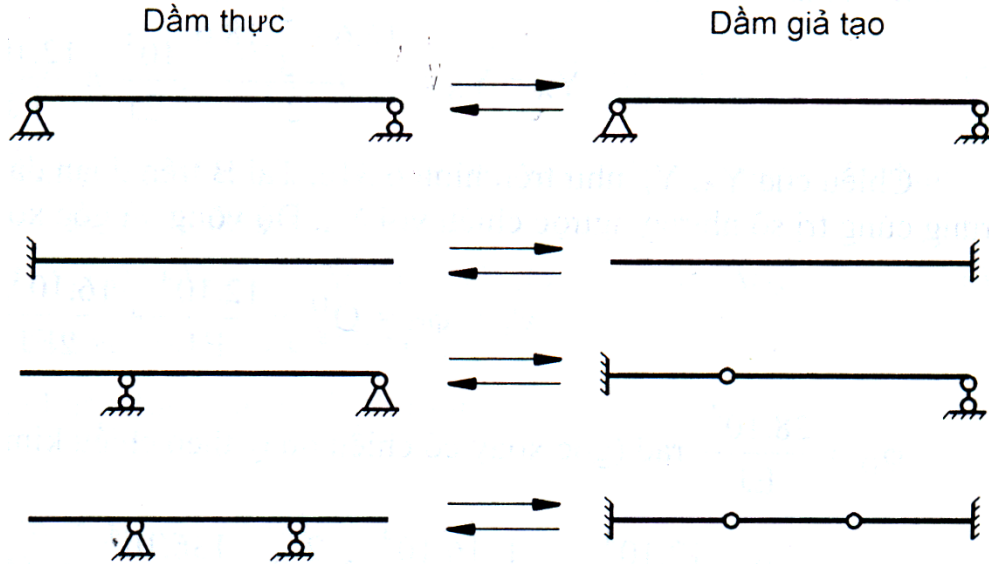
⇒ Ta có sự tương đương nhau, do vậy nếu tạo ra một tải trọng giả tạo

$$q_{gt} = -\frac{M_x}{EJ_x}, \text{ bằng phương pháp mặt cắt xác định được } Q_{gt} \text{ và } M_{gt} \text{ trên dầm}$$

giả tạo. Giá trị đó chính là độ võng và góc xoay trên dầm thực tương ứng.

⇒ Điều kiện liên kết của dầm giả tạo và dầm thực phải có mối tương quan sao cho giá trị Q_{gt} và M_{gt} trên dầm giả tạo phải đúng bằng giá trị độ võng và góc xoay trên dầm thực tương ứng (bảng 6.1).

Bảng 6.1. Dầm thực và dầm giả tạo tương ứng



⇒ Trình tự giải bài toán bằng phương pháp tải trọng giả tạo :

- Vẽ biểu đồ mômen uốn M_x cho trên dầm thực.
- Vẽ dầm giả tạo với các liên kết phù hợp với điều kiện độ võng, góc xoay tương ứng trên dầm thực
- Đặt biểu đồ M_x lên dầm giả tạo, nhưng chú ý là tung độ bằng M_x/EJ_x , chiều mũi tên của tải trọng giả tạo hướng về phía thớ căng của dầm thực (do đó thoả mãn $q_{gt} = -\frac{M_x}{EJ_x}$)

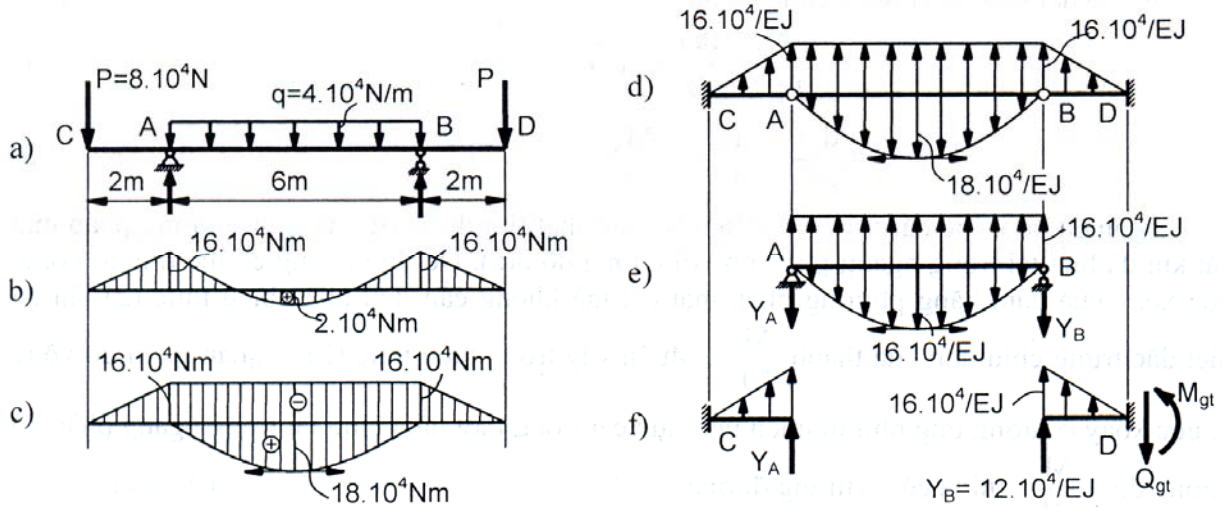
- Xác định Q_{gt} và M_{gt} ⇒ độ võng và góc xoay của dầm thực.

⇒ Để tiện lợi trong quá trình tính toán sau này, chúng ta xác định trước diện tích và hoành độ trọng tâm của một số biểu đồ (bảng 6.2).

Bảng 6.2 - diện tích và hoành độ trọng tâm của một số hình thường gặp

	<p>Bậc 2: $\Omega = \frac{1}{3}hl$; $z_1 = \frac{1}{4}l$; $z_2 = \frac{3}{4}l$</p> <p>Bậc n:</p> $\Omega = \frac{1}{n+1}hl$; $z_1 = \frac{1}{n+2}l$; $z_2 = \frac{n+1}{n+2}l$
	<p>Bậc 2: $\Omega = \frac{2}{3}hl$; $z_1 = \frac{3}{8}l$; $z_2 = \frac{5}{8}l$</p> <p>Bậc n</p> $\Omega = \frac{n}{n+1}hl$; $z_1 = \frac{n+1}{3n+2}l$; $z_2 = \frac{3n+1}{n+2}l$

Ví dụ 6.8: Xác định độ võng và góc xoay tại đầu mút D của dầm chịu lực như hình 6.26a. Biết độ cứng $EJ_x = \text{const}$.



Hình 6.26

Giải: Biểu đồ momen uốn M_x của dầm được vẽ trên hình 6.26b và được phân tích như hình 6.26c. Dầm và lực phân bố giả tạo được vẽ ở hình 6.26d. Ta chia dầm đơn giản như ở hình 6.26e và 6.26f.

Phản lực tại A và B của dầm giữa là :

$$Y_A = Y_B = \frac{16.6 - \frac{2}{3} \cdot 18.6}{2} \cdot \frac{10^4}{EJ_x} = \frac{12.10^2}{EJ_x}$$

Chiều của Y_A, Y_B như trên hình 6.26^e. Tại B trên đoạn dầm BD chịu một lực giả tạo tập trung cùng trị số nhưng ngược chiều với Y_B . Độ võng và góc xoay tại D:

$$y'_D = \varphi_D = Q_{gt}^D = \frac{12.10^4}{EJ_x} + \frac{16.10^4 \cdot 2}{2EJ_x} = \frac{28.10^4}{EJ_x} \text{ (rad)}$$

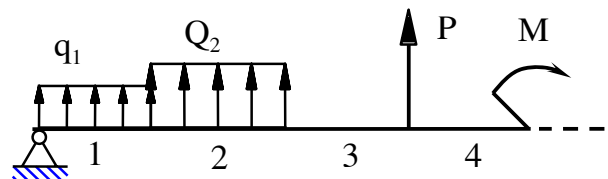
$$y_D = M_{gt}^D = \frac{12.10^4}{EJ_x} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{16.10^4}{EJ_x} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{136.10^4}{3EJ} \text{ (m)}$$

5. Phương pháp thông số ban đầu

⇒ Xét dầm có MCN thay đổi thành từng đoạn có độ cứng $EJ_x = \text{const}$.

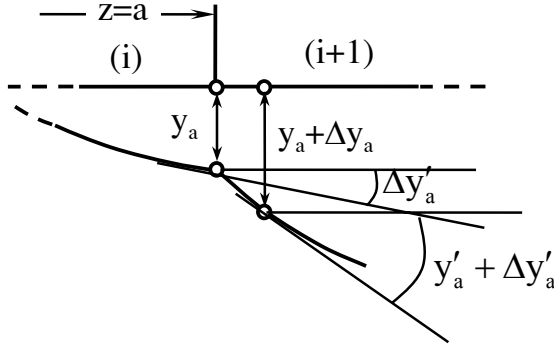
⇒ Đánh số các đoạn là 1, 2, ..., i, i+1, ..., n có độ cứng lần lượt $E_1J_1, E_2J_2, \dots, E_iJ_i, E_{i+1}J_{i+1}, \dots, E_nJ_n$ (hình 6-28)

⇒ Xét hai đoạn liên kế i và (i+1), giả thiết chỗ nối giữa hai đoạn ($z=a$) có liên kết đặc biệt bằng cặp khớp cầu

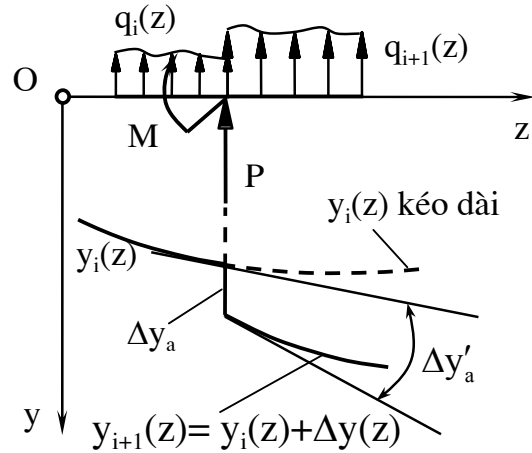


Hình 6-28

(hình 6-29). Hai bên khớp này độ võng có bước nhảy Δy_a , còn góc xoay có bước nhảy $\Delta y'_a$. Tại chỗ nối này còn có lực tập trung, mômen tập trung và tải trọng phân bố ở hai đoạn là khác nhau (hình 6-30).



Hình 6-29



Hình 6-30

\Rightarrow Khai triển $\Delta y(z)$ theo chuỗi Taylor tại hoành độ $z=a$.

\Rightarrow Sau khi biến đổi ta được phương trình đường đàn hồi biểu diễn qua độ võng của đoạn thứ $(i+1)$ theo đoạn thứ i như sau:

$$y_{i+1}(z) = y_i(z) + \Delta y_a + \Delta y'_a(z-a) - \frac{1}{EJ} \left\{ [K_{i+1}M_{i+1}(a) - K_iM_i(a)] \frac{(z-a)^2}{2!} + [K_{i+1}Q_{i+1}(a) - K_iQ_i(a)] \frac{(z-a)^3}{3!} + [K_{i+1}q_{i+1}(a) - K_iq_i(a)] \frac{(z-a)^4}{4!} + [K_{i+1}q'_{i+1}(a) - K_iq'_i(a)] \frac{(z-a)^5}{5!} + \dots \right\}$$

Trong đó $\Delta y_a = \Delta y(a)$; $\Delta y'_a = \Delta y'(a)$ là bước nhảy của độ võng và góc xoay tại mặt cắt có hoành độ $z = a$.

$$K_i = \frac{EJ}{E_i J_i}; \quad K_{i+1} = \frac{EJ}{E_{i+1} J_{i+1}}; \text{ với } EJ \text{ là độ cứng quy ước}$$

$M_{i+1}(z)$, $Q_{i+1}(z)$, $q_{i+1}(z)$, $q'_{i+1}(z)$ lần lượt là mômen uốn, lực cắt, cường độ lực phân bố, đạo hàm cường độ lực phân bố trong đoạn thứ $i+1$.

$M_i(z)$, $Q_i(z)$, $q_i(z)$, $q'_i(z)$ lần lượt là mômen uốn, lực cắt, cường độ lực phân bố, đạo hàm cường độ lực phân bố của đoạn thứ i đã kéo dài sang đoạn thứ $i+1$.

\Rightarrow Độ võng của dầm trên đoạn thứ 1:

$$y_1(z) = y_0(z) + y'_0 z - \frac{1}{EJ} \left(K_1 M_0 \cdot \frac{z^2}{2!} + K_1 Q_0 \cdot \frac{z^3}{3!} + K_1 q_0 \cdot \frac{z^4}{4!} + K_1 q'_0 \cdot \frac{z^5}{5!} + \dots \right)$$

⇒ Các trị số $y_0, y'_0, M_0, Q_0, q_0, q'_0$ tại $z = 0$ gọi là các *thông số ban đầu*.

⇒ Trường hợp dầm có độ cứng chấn uốn EJ không đổi trên suốt chiều dài:

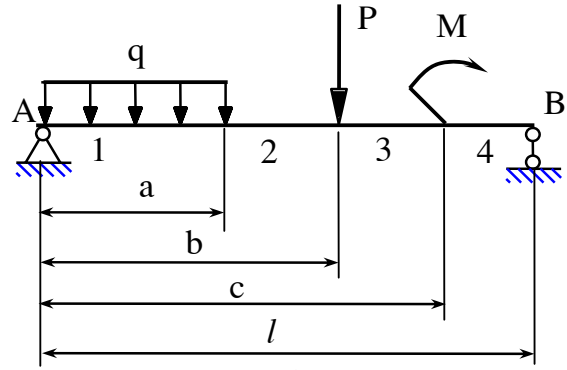
$$y_{i+1}(z) = y_i(z) + \Delta y_a + \Delta y'_a (z-a) - \frac{1}{EJ} \left\{ [M_{i+1}(a) - M_i(a)] \frac{(z-a)^2}{2!} + [Q_{i+1}(a) - Q_i(a)] \frac{(z-a)^3}{3!} + [q_{i+1}(a) - q_i(a)] \frac{(z-a)^4}{4!} + [q'_{i+1}(a) - q'_i(a)] \frac{(z-a)^5}{5!} + \dots \right\}$$

$$y_1(z) = y_0(z) + y'_0 z - \frac{1}{EJ} \left(M_0 \cdot \frac{z^2}{2!} + Q_0 \cdot \frac{z^3}{3!} + q_0 \cdot \frac{z^4}{4!} + q'_0 \cdot \frac{z^5}{5!} + \dots \right)$$

Ví dụ 6.9: Tính góc xoay φ_A của MCN tại gối tựa A của dầm có $EJ = \text{const}$, chịu tải trọng như hình 6.31.

Giải

Chia dầm thành 4 đoạn đánh số thứ tự như hình 6.31. Các thông số ban đầu và các hệ số được xác định từ các điều kiện biên của mỗi đoạn như trong bảng dưới đây:



Hình 6.31

$z = 0$	$z = a$	$z = b$	$z = c$
$y_0 = 0$	$\Delta y_a = 0$	$\Delta y_b = 0$	$\Delta y_c = 0$
$y'_0 \neq 0$	$\Delta y'_a = 0$	$\Delta y'_b = 0$	$\Delta y'_c = 0$
$M_0 = 0$	$\Delta M_a = 0$	$\Delta M_b = 0$	$\Delta M_c = M$
$Q_0 = Y_A$	$\Delta Q_a = 0$	$\Delta Q_b = -P$	$\Delta Q_c = 0$
$q_0 = -q$	$\Delta q_a = q$	$\Delta q_b = 0$	$\Delta q_c = 0$
$q'_0 = 0$	$\Delta q'_a = 0$	$\Delta q'_b = 0$	$\Delta q'_c = 0$

Do dầm có $EJ_x = \text{const}$ nên ta có các phương trình đường đàn hồi của các đoạn như sau:

$$y_1 = y'_0 z - \frac{Y_A}{EJ} \frac{z^3}{3!} + \frac{q}{EJ} \cdot \frac{z^4}{4!} \quad \text{với } 0 \leq z \leq a$$

$$y_2 = y_1 - \frac{q}{EJ} \frac{(z-a)^4}{4!} = y'_0 z - \frac{Y_A}{EJ} \frac{z^3}{3!} + \frac{q}{EJ} \frac{z^4}{4!} - \frac{q}{EJ} \frac{(z-a)^4}{4!} \text{ với } a \leq z \leq b$$

$$y_3 = y_2 + \frac{P}{EJ} \frac{(z-b)^3}{3!} = y'_0 z - \frac{Y_A}{EJ} \frac{z^3}{3!} + \frac{q}{EJ} \frac{z^4}{4!} - \frac{q}{EJ} \frac{(z-a)^4}{4!} + \frac{P}{EJ} \frac{(z-b)^3}{3!}$$

với $b \leq z \leq c$

$$y_4 = y_3 - \frac{M}{EJ} \frac{(z-c)^2}{2!} = y'_0 z - \frac{Y_A}{EJ} \frac{z^3}{3!} + \frac{q}{EJ} \frac{z^4}{4!} - \frac{q}{EJ} \frac{(z-a)^4}{4!} + \frac{P}{EJ} \frac{(z-b)^3}{3!} - \frac{M}{EJ} \frac{(z-c)^2}{2!}$$

với $c \leq z \leq l$

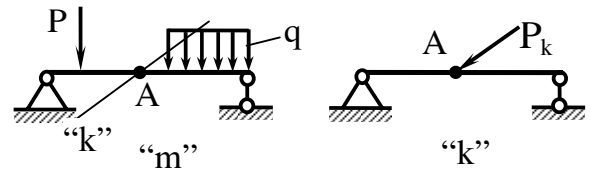
Để xác định y'_0 ta dựa vào điều kiện biên tại B: $y_4 = 0$

$$\Leftrightarrow y'_0 l - \frac{Y_A}{EJ} \frac{l^3}{3!} + \frac{q}{EJ} \frac{l^4}{4!} - \frac{q}{EJ} \frac{(l-a)^4}{4!} + \frac{P}{EJ} \frac{(l-b)^3}{3!} - \frac{M}{EJ} \frac{(l-c)^2}{2!} = 0$$

$$\Rightarrow \varphi_A = y'_0 = \frac{Y_A}{EJ} \frac{l^3}{3!} - \frac{q}{EJ} \frac{l^4}{4!} + \frac{q}{EJ} \frac{(l-a)^4}{4!} - \frac{P}{EJ} \frac{(l-b)^3}{3!} + \frac{M}{EJ} \frac{(l-c)^2}{2!}$$

6. Công thức Mo - phương pháp nhân biểu đồ Vêrêsinhin

6.1. Công thức Mo: Trạng thái chịu lực của khung như đã cho là trạng thái “m”, lực và chuyển vị của trạng thái này có kèm theo chỉ số m (hình 6.31). Xác định chuyển vị theo phương k của trọng tâm MCN tại A. Muốn vậy tạo



Hình 6.31

một trạng thái chịu lực “k” mới bằng cách bỏ tất cả ngoại lực ban đầu tác dụng lên hệ và đặt theo phương k một lực P_k có giá trị và chiều tùy ý. Để đơn giản ta thường chọn $P_k = 1$, gọi là trạng thái đơn vị.

Công thức Mo giúp ta xác định chuyển vị theo các phương của thanh có dạng bất kỳ. Muốn xác định chuyển vị thẳng tại một điểm nào đó của trục thanh, ta đặt tại điểm đó một lực tập trung đơn vị, còn muốn xác định chuyển vị góc (góc xoay) thì ta đặt mômen tập trung đơn vị.

Công thức tổng quát của Mo tính chuyển vị hệ đàn hồi tuyến tính:

$$\Delta_{km} = \sum \int \frac{\bar{N}_{zk} N_{zm} dz}{EF} + \sum \int \frac{\bar{M}_{xk} M_{xm} dz}{EJ_x} + \sum \int \frac{\bar{M}_{yk} M_{ym} dz}{EJ_y} + \sum \int \eta_x \frac{\bar{Q}_{xk} Q_{xm} dz}{GF} + \sum \int \eta_y \frac{\bar{Q}_{yk} Q_{ym} dz}{GF} + \sum \int \frac{\bar{M}_{zk} M_{zm} dz}{GJ_p} \quad (6.31)$$

$M_{xm}, M_{ym}, M_{zm}, N_{zm}, Q_{xm}, Q_{ym}$ là các nội lực trên MCN do tải trọng gây ra còn $\bar{N}_{zk}, \bar{M}_{xk}, \bar{M}_{yk}, \bar{M}_{zk}, \bar{Q}_{xk}, \bar{Q}_{yk}$ là các nội lực do tải trọng đơn vị gây ra.

Ví dụ 6.10: cho dầm chịu lực như hình 6.32. Xác định độ võng ở giữa nhịp. Bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt.

Giải: trạng thái chịu lực của dầm như đã cho là trạng thái “m”. Biểu thức mômen

uốn tại MCN: $M_m = \frac{1}{2} q(lz - z^2)$

Để tính độ võng tại giữa nhịp ta tạo ra trạng thái “k” bằng cách đặt tại đó lực $P_k = 1$ theo chiều chuyển vị cần tính. Biểu thức

mômen uốn: $\bar{M}_k = \frac{1}{2} z$

Thay vào (6.31), ta được (bỏ qua lực dọc,

cắt): $y\left(\frac{1}{2}\right) = \Delta_{km} = 2 \int_0^{l/2} \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} q(lz - z^2) \frac{1}{2} z dz = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}$

(Phải lấy tích phân từ $0 \rightarrow l/2$ và từ $l/2 \rightarrow l$, nhưng do hai tích phân này bằng nhau nên lấy một tích phân rồi nhân cho 2).

IV. PHƯƠNG PHÁP NHÂN BIỂU ĐỒ VÊRÊSAGHIN

⇒ Xác định chuyển vị của các thanh có độ cứng không đổi, theo công thức Mo khá phức tạp. Đối với hệ thanh thẳng, ta thấy ít nhất một hàm nội lực dưới dấu tích phân là bậc nhất hoặc hằng số.

⇒ Nếu một trong hai hàm số dưới dấu tích phân có dạng bậc nhất thì ta có thể thay cách giải tích phân trên bằng phương pháp nhân biểu đồ của Vêrêzaghin.

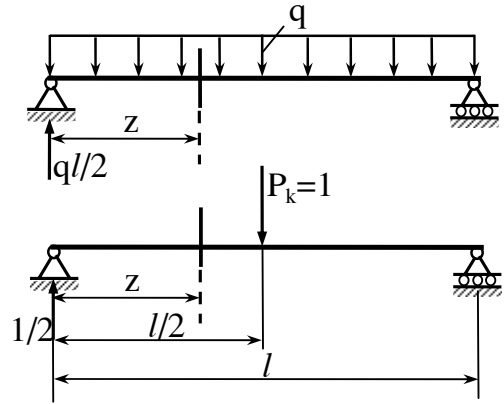
⇒ Giả thiết trên đoạn chiều dài l nào đó của thanh, hàm số $G(z)$ có dạng bất kỳ còn $F(z)$ có dạng bậc nhất: $F(z) = (az + b)$

⇒ Tích phân $\int \frac{\bar{M}_k M_m dz}{EJ} = \int F(z).G(z) dz$,

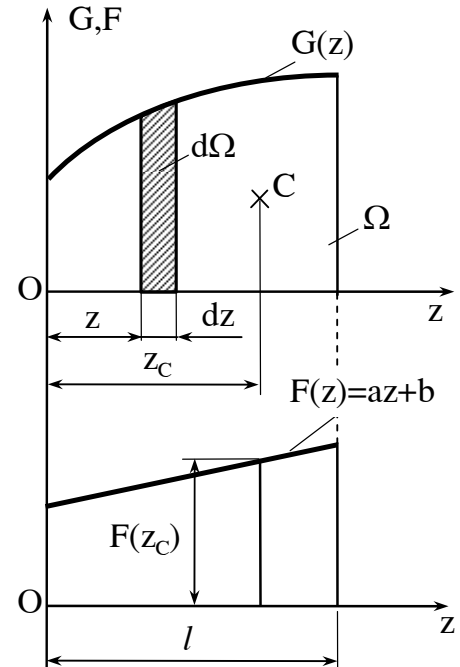
trong đó $F(z) = \bar{M}_k$ còn $G(z) = \frac{M_m}{EJ}$.

⇒ Tích phân I của hai hàm số $F(z)$ và $G(z)$:

$$I = \int_0^l F(z).G(z) dz = \int_0^l (az + b).G(z) dz$$



Hình 6.32



Hình 6.33

với $d\Omega = G(z)dz$ là một diện tích vô cùng nhỏ của biểu đồ $G(z)$, ta có tích phân theo biến mới: $I = \int_{\Omega} (az + b)d\Omega = a \int_{\Omega} zd\Omega + b \int_{\Omega} d\Omega = a \int_{\Omega} zd\Omega + b\Omega$

\Rightarrow Ta có $\int_{\Omega} zd\Omega = z_C \Omega$, trong đó z_C là hoành độ trọng tâm của diện tích Ω .

Khi đó tích phân I sẽ là: $I = az_C \Omega + b\Omega = \Omega(az_C + b)$

\Rightarrow Theo hình 6.33, ta có $az_C + b = F(z_C)$ – tung độ của hàm $F(z)$ ứng với hoành độ $z_C \Rightarrow \boxed{I = \Omega F(z_C)}$ (6.32)

\Rightarrow Từ kết quả trên ta suy ra: nếu các biểu đồ nội lực M_m, N_m, Q_m do tải trọng gây ra có dạng bất kỳ, còn các biểu đồ $\bar{N}_k, \bar{M}_k, \bar{Q}_k$ do tải trọng đơn vị có dạng bậc nhất thì:

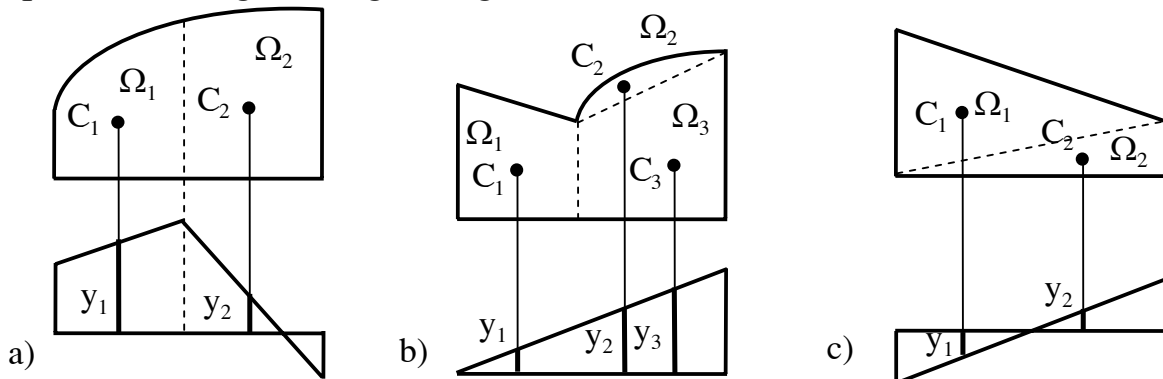
$$\Delta_{km} = \sum_{EJ} \frac{1}{\Omega(M_m)} \Omega(M_m) \bar{M}_k(C) + \sum_{EF} \frac{1}{\Omega(N_m)} \Omega(N_m) \bar{N}_k(C) + \sum_{GF} \frac{1}{\Omega(Q_m)} \Omega(Q_m) \bar{Q}_k(C) \quad (6.33)$$

trong đó $\Omega(M_m), \Omega(N_m), \Omega(Q_m)$ là diện tích các biểu đồ M_m, N_m, Q_m .

$\bar{M}_k(C), \bar{N}_k(C), \bar{Q}_k(C)$ là các giá trị của biểu đồ $\bar{M}_k, \bar{N}_k, \bar{Q}_k$ tại những vị trí tương ứng với trọng tâm của diện tích các biểu đồ M_m, N_m, Q_m .

Cần chú ý rằng:

- Nếu $F(z)$ và $G(z)$ đều là bậc nhất thì phép nhân trên có tính hoán vị.
- Nếu chỉ có một biểu đồ là bậc nhất thì giá trị tung độ tương ứng tại trọng tâm bắt buộc phải lấy ở biểu đồ có dạng bậc nhất đó.
- Nếu đồ thị bậc nhất bị gãy khúc thì phải chia chiều dài lấy tích phân thành từng đoạn, trên mỗi đoạn đồ thị này là một đường thẳng tron, để thực hiện phép nhân, sau đó lấy tổng kết quả phép nhân trong các đoạn.
- Nếu các biểu đồ có dạng phức tạp thì khi nhân ta chia chúng ra nhiều hình đơn giản, sau đó ta cộng các kết quả lại với nhau. Kết quả của phép nhân mang dấu (+) khi diện tích và tung độ đều cùng dấu hoặc cùng nằm về một phía của đường chuẩn. Kết quả của phép nhân biểu đồ đối xứng với biểu đồ phản đối xứng sẽ bằng không.



Hình 6.34

Ví dụ 6.11: Tìm độ võng tại B và góc xoay tại A của dầm chịu lực như trên hình 6.35a (bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt).

Giải

Trạng thái "m" là trạng thái chịu lực của dầm (hình 6.35a). Biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra M_m biểu diễn trên hình 6.35b.

Để tìm độ võng tại B ta tạo lên trạng thái "k" (hình 6.35c), biểu đồ mômen \bar{M}_k^B được biểu diễn trên hình 6.35d.

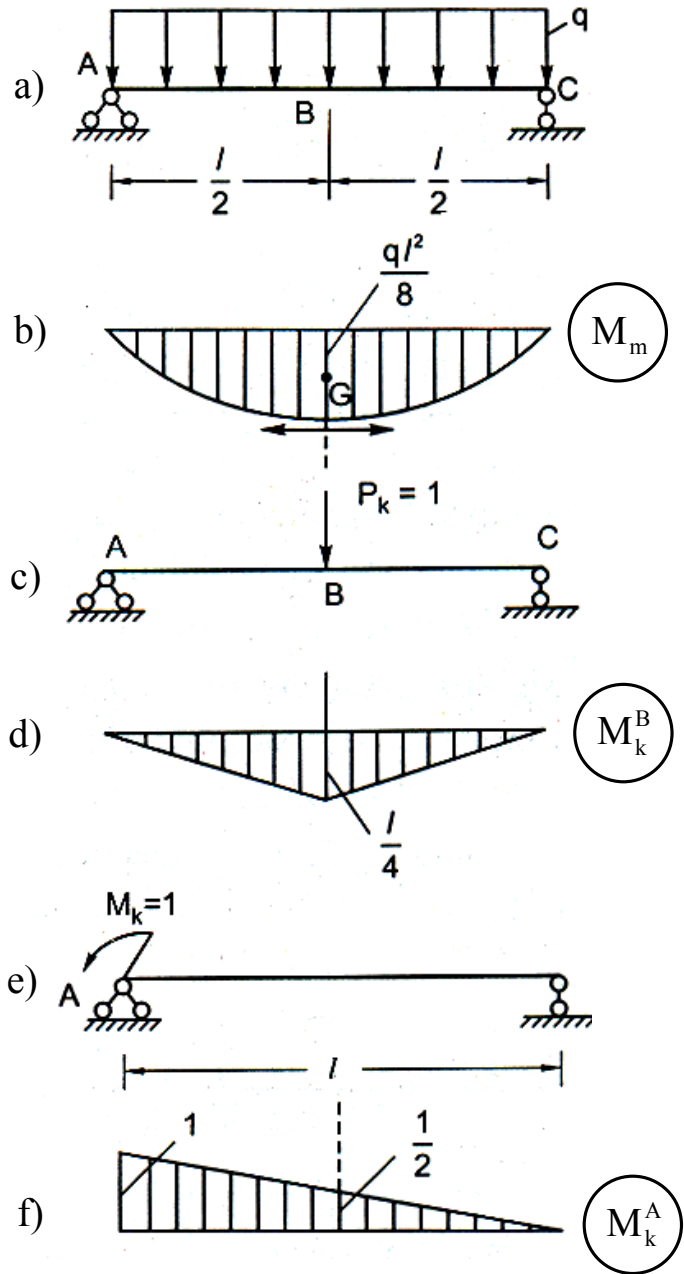
Ở đây ta thấy trong hai đoạn AB và BC biểu đồ \bar{M}_k^B được biểu diễn bằng những đường thẳng khác nhau, vì vậy để tính độ võng dùng phương pháp nhân biểu đồ Vêrêtaghin ta phải chia biểu đồ M_m theo 2 phần từ A đến B và từ B đến C. Phép nhân Vêrêtaghin cho kết quả như sau:

$$y_B = \frac{1}{EJ_x} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{l}{4} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ_x}$$

Để tìm góc xoay tại A ta sẽ tạo trạng thái "k" như hình 6.35e. Biểu đồ \bar{M}_k^A được biểu diễn như hình 6.35f. Theo phép nhân Vêrêtaghin ta có:

$$\theta_A = \Delta_{km} = \frac{1}{EJ_x} \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot l \cdot \frac{1}{2} \right) = -\frac{ql^2}{24EJ_x}$$

Kết quả mang dấu (-) chứng tỏ là góc xoay tại A có chiều ngược lại với chiều của M_k đã chọn.



Hình 6.35

Ví dụ 6.12: Tìm độ võng tại B của dầm chịu lực như trên hình 6.36a (bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt).

Giải

Biểu đồ mômen của trạng thái "m" được biểu diễn trên hình 6.36b. Để đơn giản khi nhân biểu đồ ta có thể xem biểu đồ M_m trong khoảng AC là tổng cộng của một biểu đồ bậc nhất và một đường bậc 2 (hình 6.36c). Điều đó cũng giống như chúng ta xem rằng trạng thái "m" là tổng cộng của hai trạng thái: trạng thái chỉ có một mình lực P tác dụng và trạng thái chỉ có một mình lực q tác dụng (hình 6.36d).

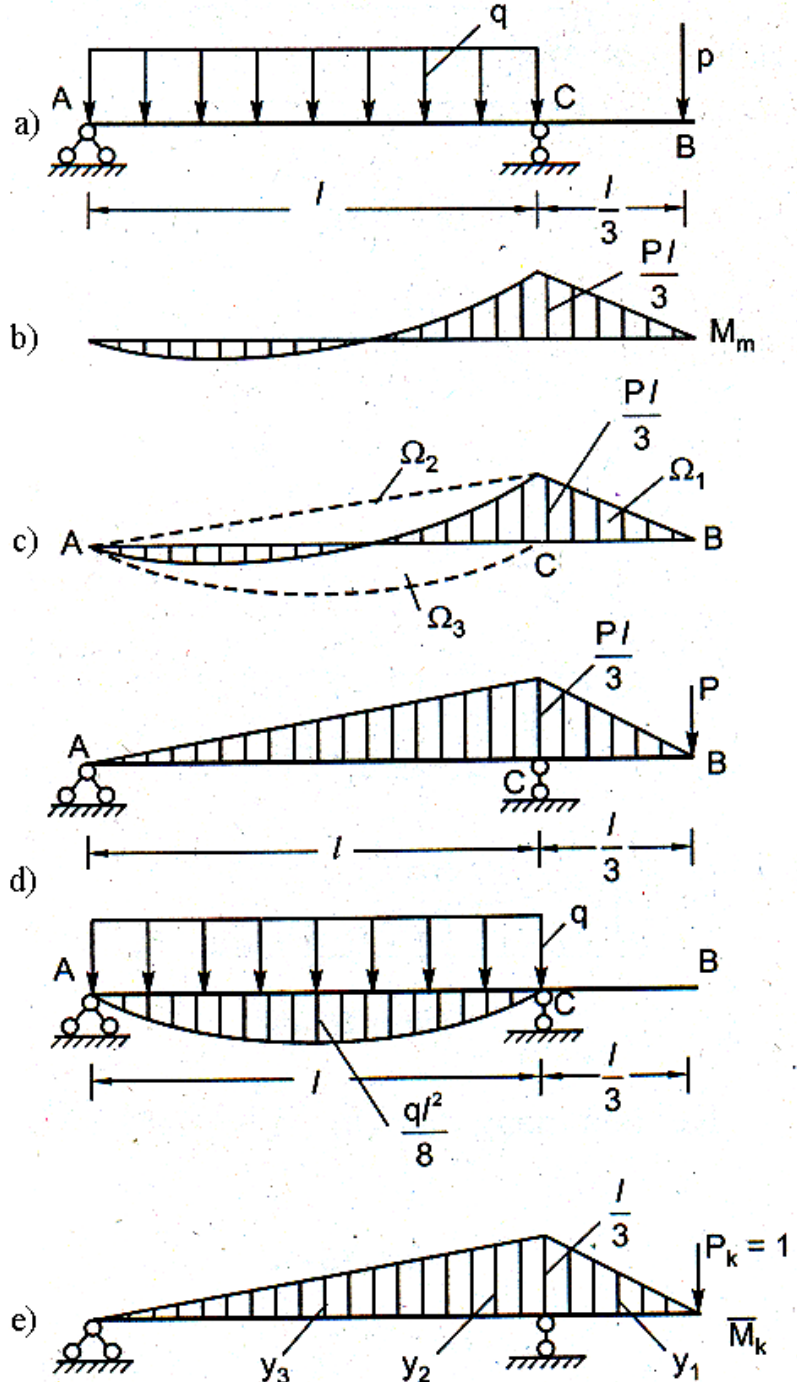
Để tìm chuyển vị tại B ta tạo ra trạng thái "k" như trên hình 6.36e, biểu đồ mômen cũng được biểu diễn trên hình đó.

Với cách đó ta có thể thực hiện phép nhân biểu đồ Vêrêsinh một cách dễ dàng:

$$y_B = \Delta_{km} =$$

$$= \frac{1}{EJ_x} (\Omega_1 y_1 + \Omega_2 y_2 + \Omega_3 y_3) = \frac{1}{EJ_x} \left(\frac{1}{2} P \frac{l}{3} \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{2l}{3} + \frac{1}{2} P \frac{l}{3} \cdot l \cdot \frac{2l}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{3} \right)$$

$$= \frac{4Pl^3}{81EJ_x} - \frac{ql^4}{72EJ_x}$$



Hình 6.36

V. BÀI TOÁN SIÊU TĨNH

⇒ Cũng như trong các bài toán về kéo, nén và xoắn, ở đây ta cũng gặp những bài toán siêu tĩnh về uốn ⇒ cần phải thiết lập thêm phương trình biến dạng

⇒ Ví dụ, cho dầm chịu lực như hình 6.37. Siêu tĩnh bậc 1.

⇒ Dựa vào điều kiện độ võng tại B của dầm bằng 0 để lập phương trình biến dạng:

$$y_B = 0$$

⇒ Độ võng B do phản lực R_B và do tải trọng phân bố q .

⇒ Dựa vào phương pháp đồ toán ta chọn dầm giả tạo và tải trọng phân bố giả tạo như hình 6.37. Mômen giả tạo tại B do tải trọng q_{gt} gây nên là:

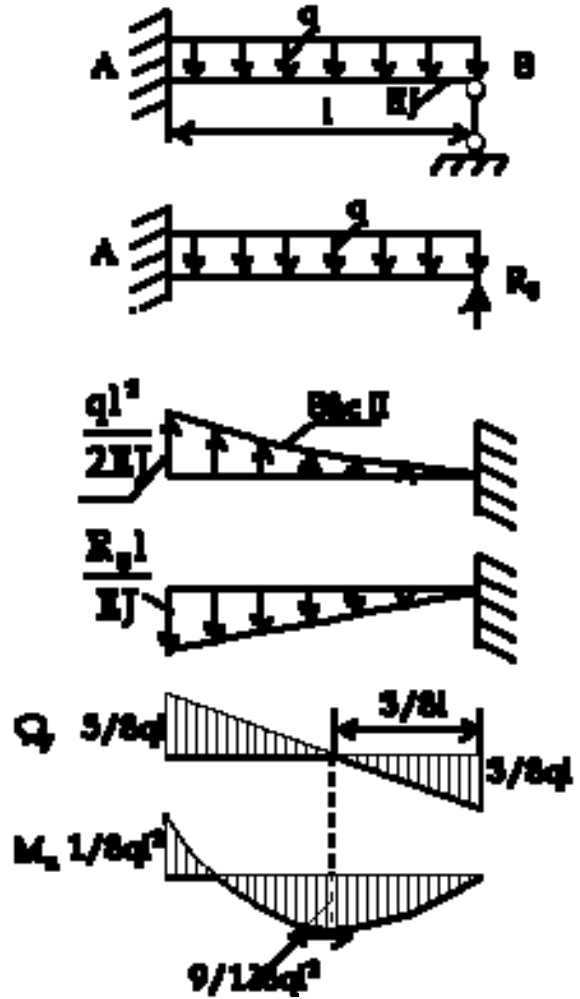
$$M_{gt} = \frac{1}{3} \frac{ql^2}{2EJ} \cdot l \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{R_B \cdot l}{EJ} \cdot l \cdot \frac{2}{3}$$

⇒ Trị số của mômen giả tạo đó chính là độ võng tại B. Với điều kiện độ võng bằng không ta có phương

trình:
$$\frac{ql^4}{8EJ} - \frac{R_B l^3}{3EJ} = 0$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{3}{8}ql; R_A = \frac{5}{8}ql$$

⇒ Khi đã có R_B ta dễ dàng vẽ được biểu đồ nội lực của dầm



Hình 6.37