

## Chương 3. TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT

### I. KHÁI NIỆM VỀ TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT

⇒ Trạng thái ứng suất tại một điểm của vật thể đàn hồi chịu lực là tập hợp tất cả các ứng suất tác dụng trên tất cả các mặt vô cùng bé đi qua điểm đó, đặc trưng bởi tenxơ đối xứng cấp 2 có 6 thành phần ứng suất độc lập (hình 3.1):

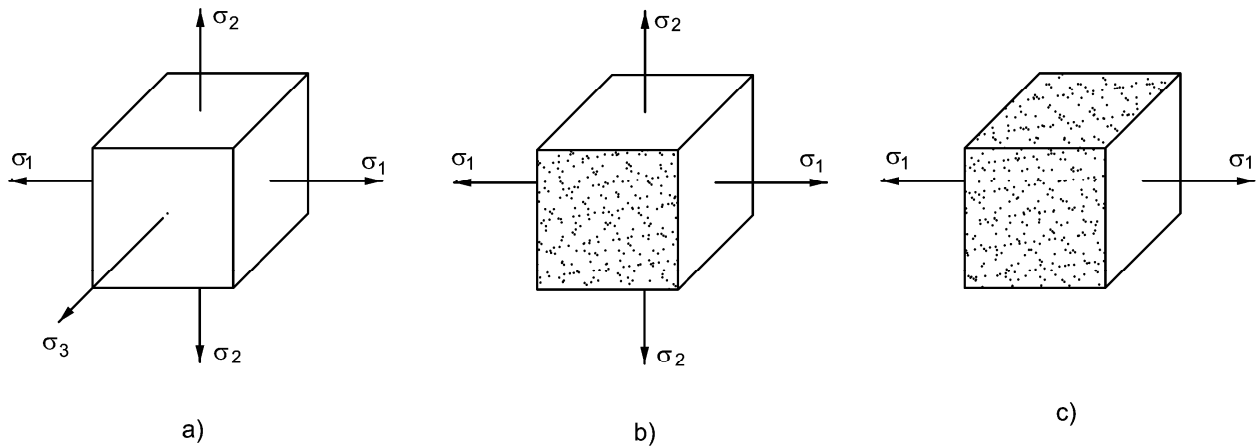
$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

như biểu thị trên các mặt của phân tố toạ độ  $Cdx dy dz$ .

⇒ Qua 1 điểm ta luôn tìm ba mặt vuông góc với nhau có ứng suất tiếp bằng 0, các mặt đó là *mặt chính*, pháp tuyến mặt chính gọi là *phương chính*, ứng suất pháp trên các mặt chính gọi là *ứng suất chính*  $\sigma_1, \sigma_2$  và  $\sigma_3$ :

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \quad (3.2)$$

⇒ Căn cứ vào các ứng suất chính ta phân loại trạng thái ứng suất như sau: *Trạng thái ứng suất khối* (hình 3.2a), *trạng thái ứng suất phẳng* (hình 3.2b), *trạng thái ứng suất đơn* (hình 3.2c).

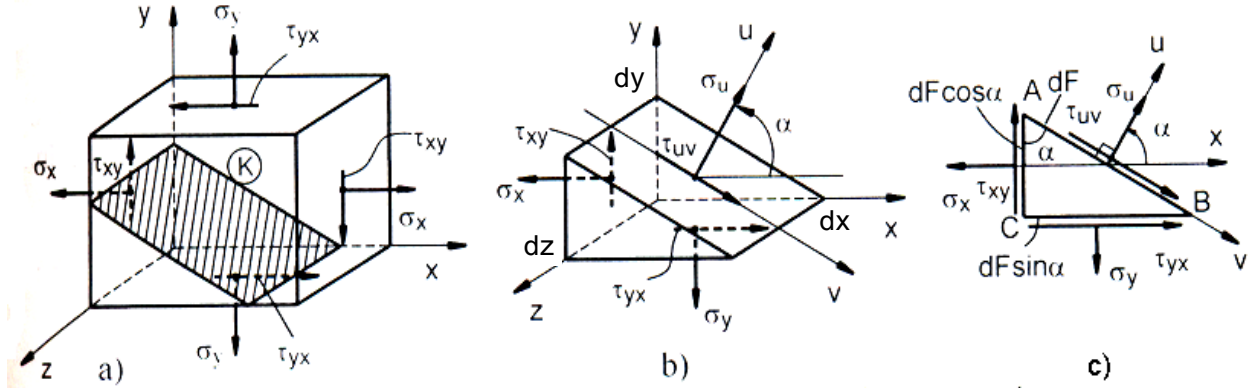


Hình 3.2

## II. TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT PHẪNG

### 1. Ứng suất trên mặt nghiêng bất kì

⇒ Tách một phân tử tại điểm K khỏi vật thể đàn hồi chịu lực (hình 3.3a). Giả thiết mặt vuông góc với trục z là mặt chính ( $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ ), các mặt còn lại có cả ứng suất pháp và ứng suất tiếp.



Hình 3.3

⇒ Xét sự cân bằng của phân tử hình lăng trụ đáy là tam giác, mặt bên nghiêng. Phương trình tổng mômen các lực với O:

$$\sum M_O = \tau_{xy} dy dz \frac{dx}{2} - \tau_{yx} dz dx \frac{dy}{2} = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (3.3)$$

⇒ *Luật đối ứng của ứng suất tiếp*, phát biểu như sau: “Nếu trên mặt cắt nào đó có ứng suất tiếp thì trên mặt cắt vuông góc với nó cũng phải có ứng suất tiếp có cùng trị số nhưng đối chiều”.

⇒ Gọi diện tích mặt AB là  $dF$ , khi đó diện tích mặt AC là  $dF \cos \alpha$  và diện tích mặt BC là  $dF \sin \alpha$ . Lập các phương trình hình chiếu sau của phân tử ABC lên các trục u và v ta có:

$$\begin{aligned} \sum U &= \sigma_u dF - (\sigma_x dF \cos \alpha) \cos \alpha + (\tau_{xy} dF \cos \alpha) \sin \alpha - \\ &\quad - (\sigma_y dF \sin \alpha) \sin \alpha + (\tau_{yx} dF \sin \alpha) \cos \alpha = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum V &= \tau_{uv} dF - (\sigma_x dF \cos \alpha) \sin \alpha - (\tau_{xy} dF \cos \alpha) \cos \alpha + \\ &\quad + (\sigma_y dF \sin \alpha) \cos \alpha + (\tau_{yx} dF \sin \alpha) \sin \alpha = 0 \end{aligned}$$

⇒ Sau khi rút gọn, sử dụng định luật đối ứng ứng suất tiếp ta được giá trị của  $\sigma_u$  và  $\tau_{uv}$ :

$$\sigma_u = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (3.4)$$

$$\tau_{uv} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (3.5)$$

$\Rightarrow$  Rõ ràng là khi  $\alpha = 0$  (hoặc  $\pi/2$ ) thì  $\sigma_u$  và  $\tau_{uv}$  có giá trị bằng  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$  (hoặc  $\sigma_y$ ,  $\tau_{yx}$ ).

## 2. Ứng suất chính và phương chính

$\Rightarrow$  Mặt chính được xác định thông qua góc nghiêng  $\alpha_0$ , sao cho ứng suất tiếp trên đó bằng 0:

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha_0 + \tau_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} (= \operatorname{tg} \beta) \quad (3.6)$$

$$\Rightarrow \alpha_0 = \frac{\beta}{2} + k \cdot \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$  Ta thấy  $\alpha_0$  có hai nghiệm là  $\alpha_1$  và  $\alpha_2$  (ứng với  $k = 0$  và  $k = 1$ ) lệch nhau  $90^\circ \Rightarrow$  ta luôn có hai phương chính vuông góc với nhau. Thay  $\alpha_1$  và  $\alpha_2$  vào (3.4) ta sẽ được các ứng suất chính cần tìm, đó là những ứng suất pháp cực trị, vì

$$\frac{d\sigma_u}{d\alpha} = -2 \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha_0 - \tau_{xy} \cos 2\alpha_0 \right) = -2\tau_{uv} = 0$$

Thay  $\alpha_0$  vào (3.6) ta có : 
$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.7)$$

$\Rightarrow$  Ứng suất tiếp cực trị xác định bằng  $d\tau_{uv}/d\alpha = 0$ :

$$\frac{d\tau_{uv}}{d\alpha} = 2 \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - 2\tau_{xy} \sin 2\alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

$\Rightarrow$  So sánh với (3.7), ta được:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha_0} = -\cot g 2\alpha_0 \Rightarrow \alpha = \alpha_0 + k \cdot \frac{\pi}{4} \quad (3.8)$$

*Kết luận:* những mặt có ứng suất tiếp cực trị tạo với mặt chính một góc  $45^\circ$ . Thay (3.8) vào (3.5) với  $\cos 2\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}}$ , ta được:

$$\tau_{\max}^{\min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (3.9)$$

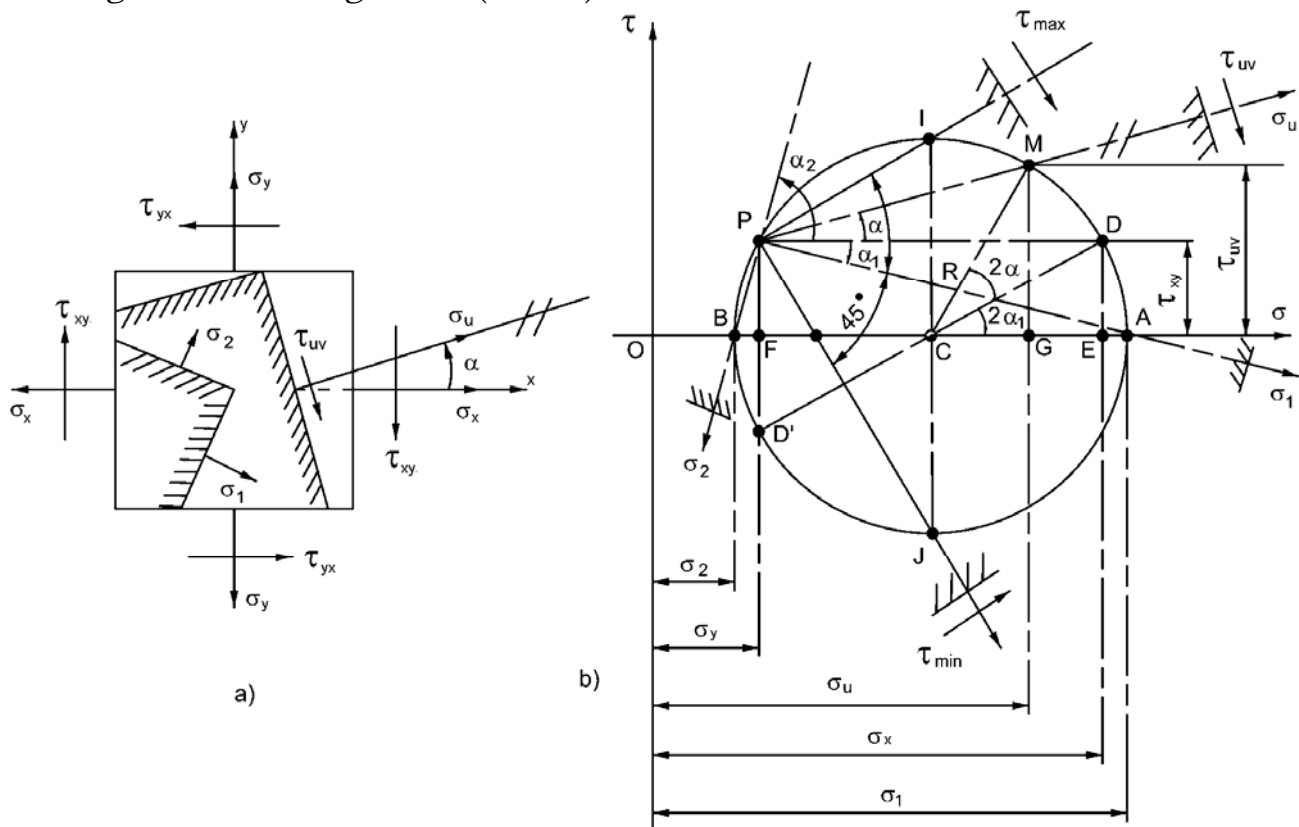
$\Rightarrow$  Tính theo ứng suất chính ta có: 
$$\tau_{\max}^{\min} = \pm \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad (3.10)$$

### III. VÒNG TRÒN MO (MOHR) ỨNG SUẤT

#### 1. Cơ sở của phương pháp và cách vẽ vòng tròn MO ứng suất

⇒ Xét một phân tố với các ứng suất  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  đã cho như hình 3.4a. Lập hệ toạ độ  $O\sigma\tau$  (hình 3.4b) theo tỷ lệ nhất định. Trên trục hoành  $\sigma$  đặt các đoạn  $OE = \sigma_x$  và  $OF = \sigma_y$ . Từ E dựng đoạn  $ED = \tau_{xy}$  vuông góc với OE. Vẽ vòng tròn có tâm C là trung điểm của đoạn

$EF$  ( $OC = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ ) và bán kính  $CD$  ( $CD = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ ), gọi là *vòng tròn Mo ứng suất* (Mohr).



Hình 3.4

⇒ Để xác định các ứng suất  $\sigma_u$  và  $\tau_{uv}$  trên mặt xiên có phương  $u$  làm với trục  $x$  một góc  $\alpha$  cho trước (hình 3.4a) hãy lấy trên vòng tròn vừa vẽ một điểm  $P$  (thường gọi là *điểm cực*) có hoành độ  $\sigma_y$  và tung độ  $\tau_{xy}$  (hình 3.4b), rồi từ  $P$  vẽ tia song song với phương  $u$  cho cắt vòng tròn tại điểm  $M$ . Toạ độ của  $M$  chính là các ứng suất  $\sigma_u$  và  $\tau_{uv}$  cần tìm.

## 2. Xác định ứng suất chính và phương chính

⇒ Các giao điểm A và B của vòng tròn Mo với trục hoành  $O\sigma$  là những điểm có hoành độ lớn nhất và nhỏ nhất, tung độ bằng 0:

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.11)$$

⇒ Phương của các tia PA và PB là các phương chính cần tìm của phân tố (hình 3.4a).

⇒ Theo hình 3.4b dễ thấy luôn luôn có:

$$\sigma_{\max} + \sigma_{\min} = 2OC = \sigma_y + \sigma_z = \text{hằng} \quad (3.12)$$

“*Tổng ứng suất pháp trên hai mặt vuông góc với nhau là hằng số*”.

⇒ Gọi  $\alpha_1$  và  $\alpha_2$  là góc của phương chính thứ nhất và phương chính thứ hai đối với trục x. Theo hình 3.4b, có:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{FP}{FA} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_{\max}}; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{FP}{FB} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_{\min}} \quad (3.13)$$

⇒ Trường hợp kéo (nén) đúng tâm ứng suất tiếp lớn nhất:

$$|\tau_{\max}| = |\tau_{\min}| = \frac{1}{2} \sigma_z \quad (3.14)$$

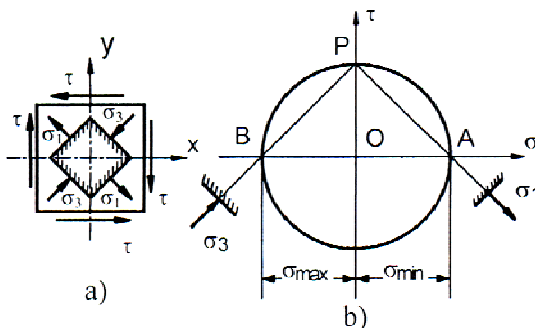
đó là hai mặt vuông góc với nhau, lần lượt làm với trục z một góc  $45^\circ$  và  $135^\circ$ .

## 3. Hai trường hợp đặc biệt

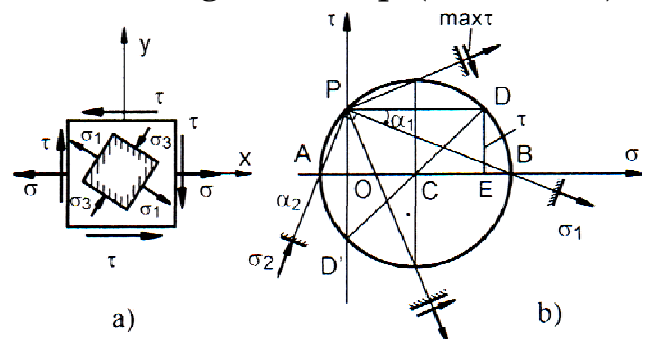
⇒ Trạng thái trượt thuần túy: phân tố mà trên các mặt chỉ có ứng suất tiếp (hình 3.5a). Lúc này vòng tròn Mo có tâm trùng với gốc toạ độ (hình 3.5b). Các ứng suất chính (ứng suất pháp cực trị) khác dấu nhau và có giá trị bằng giá trị của ứng suất tiếp:

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = |\tau|, \quad \sigma_2 = 0 \quad (3.15)$$

Các phương chính xiên góc  $45^\circ$  so với ứng suất tiếp (hình 3.5a).



Hình 3.5



Hình 3.6

⇒ Trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt là trạng thái có một thành

phần ứng suất pháp, ví dụ  $\sigma_x = \sigma$ ,  $\sigma_y = 0$  (hình 3.6a). Vòng Mo của TTUS này vẽ trên hình 3.6b. Trị số ứng suất chính (ứng suất pháp cực trị) là

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (3.16)$$

## IV. LIÊN HỆ GIỮA ỨNG SUẤT - BIẾN DẠNG

### 1. Biến dạng dài (định luật Húc tổng quát)

⇒ Xét phân tố chính như hình 3.7, hãy tìm biến dạng dài tương đối  $\varepsilon_1$  theo phương I của phân tố.

Biến dạng do  $\sigma_1$  sinh ra:  $\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_1}{E}$

Biến dạng do  $\sigma_2$  sinh ra:  $\varepsilon_{12} = -\mu \frac{\sigma_2}{E}$

Biến dạng do  $\sigma_3$  sinh ra:  $\varepsilon_{13} = -\mu \frac{\sigma_3}{E}$

⇒ Biến dạng dài (tương đối) theo phương I do các ba ứng suất  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  và  $\sigma_3$  sinh ra:  $\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13}$ .

⇒ Làm tương tự ta được biến dạng (tương đối) theo phương II và phương III của phân tố:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] & \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] & \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] & \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \quad \text{hoặc} \quad (3.16)$$

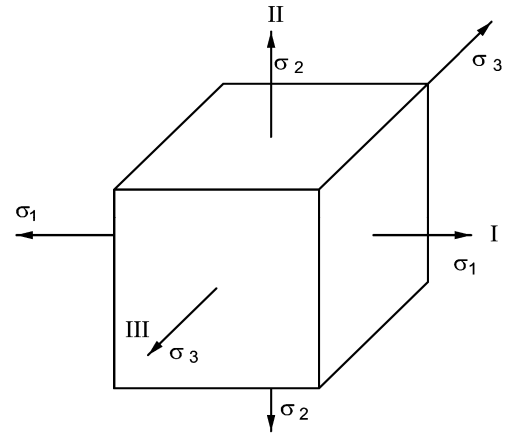
E: môđun đàn hồi của vật liệu, [lực/(chiều dài)<sup>2</sup>].

$\mu$ : hệ số Poát-xông của vật liệu, có giá trị  $0 \div 0,5$ .

⇒ Các hệ thức bậc nhất (3.16) trên đây giữa biến dạng dài và ứng suất pháp là nội dung của *định luật Húc tổng quát* đối với vật rắn đàn hồi tuyến tính.

### 2. Biến dạng góc (Định luật Húc về trượt)

⇒ Xét biến dạng của phân tố. Dưới tác dụng của ứng suất tiếp phân tố bị biến đổi hình dáng và trở thành hình bình hành (hình 3-8). Theo định luật Húc, giữa ứng suất tiếp  $\tau$  và góc trượt  $\gamma$  có



**Hình 3.7**

$$\text{liên hệ sau: } \tau_{ij} = G\gamma_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3.18)$$

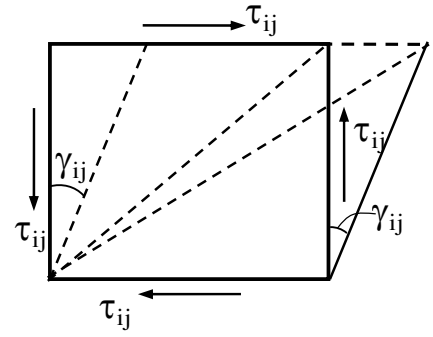
trong đó  $G$  là hệ số tỷ lệ gọi là môđun đàn hồi khi trượt [lực/chiều dài<sup>2</sup>], đó là hằng số vật liệu, được xác định từ thí nghiệm. Môđun  $G$  liên hệ với  $E$  và  $\mu$  như sau:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

Xét phân tố với hệ trục tọa độ  $x, y$ , và  $z$ . Quan hệ ứng suất và biến dạng góc là:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \quad (3.19)$$

$\Rightarrow$  Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng (3.16), (3.17) hoặc (3.18) biểu diễn bằng định luật Húc tổng quát.



Hình 3.8

### 3. Biến dạng thể tích tỷ đối (định luật Húc khối)

$\Rightarrow$  Gọi  $dx, dy$  và  $dz$  là các cạnh của phân tố và  $V_0$  là thể tích ban đầu của phân tố, ta có:  $V_0 = dxdydz$

$\Rightarrow$  Sau khi biến dạng, chiều dài các cạnh thay đổi sẽ là  $(dx + \Delta dx)$ ,  $(dy + \Delta dy)$  và  $(dz + \Delta dz)$ . Thể tích sau khi biến dạng:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_0 + \Delta V = (dx + \Delta dx).(dy + \Delta dy).(dz + \Delta dz) = \\ &= dxdydz \left(1 + \frac{\Delta dx}{dx}\right) \left(1 + \frac{\Delta dy}{dy}\right) \left(1 + \frac{\Delta dz}{dz}\right) = dxdydz (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Vì biến dạng là bé nên có thể bỏ qua các đại lượng vô cùng bé bậc 2 trở lên. Cuối cùng ta được:  $V_1 = V_0(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$

$\Rightarrow$  Gọi  $\theta$  là biến dạng thể tích tương đối của phân tố, ta có:

$$\theta = \frac{V_1 - V_0}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1-2\mu}{E} \Sigma$$

$$\Rightarrow \text{Tổng ứng suất pháp là: } \Sigma = \frac{E}{1-2\mu} \theta \quad (3.20)$$

$\Rightarrow$  Công thức trên biểu diễn liên hệ bậc nhất giữa biến dạng thể tích tương đối và tổng các ứng suất pháp, gọi là *định luật Húc khối*.

## V. VÍ DỤ ÁP DỤNG

**Ví dụ 3.1.** Ứng suất toàn phần trên mặt cắt m-n đi qua một điểm của một vật thể trong trạng thái ứng suất phẳng  $p = 3000 \text{ N/cm}^2$  có phương tạo thành một góc  $60^\circ$  với mặt cắt. Trên mặt vuông góc với mặt cắt này chỉ có ứng suất tiếp (hình 3.9).

Tính ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên mặt cắt tạo thành góc  $45^\circ$  với mặt cắt m-n. Tính ứng suất pháp lớn nhất tại điểm đó.

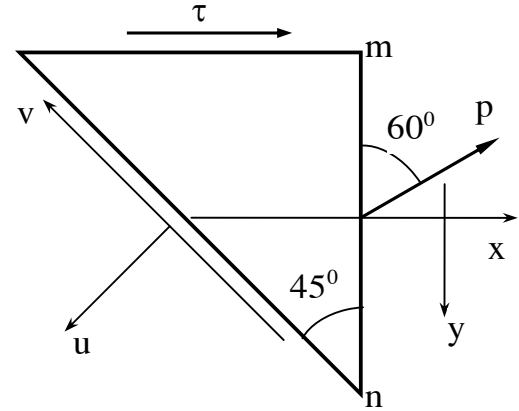
*Giải*

Ta thiết lập hệ trục xy trên mặt cắt m-n và hệ trục uv trên mặt cắt nghiêng như hình 3.9. Khi đó các thành phần ứng suất trên các mặt của phần tử ở trạng thái ứng suất phẳng:

$$\sigma_x = p \sin 60^\circ = 3.0,86 = 2,6 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_{xy} = -p \cos 60^\circ = -5.0,5 = -1,5 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_y = 0$$



Hình 3.9

Áp dụng công thức tính ứng suất trên mặt cắt nghiêng với  $\alpha = -135^\circ$ , ta có:

$$\sigma_u = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \approx 2,8 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_{uv} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \approx 1,3 \text{ kN/cm}^2$$

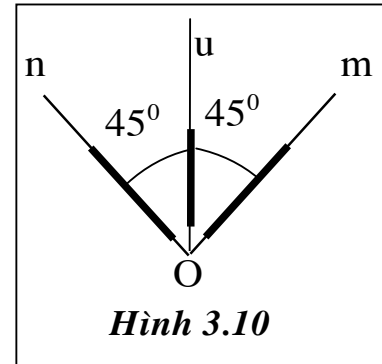
Ứng suất pháp lớn nhất tại điểm đó là:

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \approx 3,28 \text{ kN/cm}^2$$

**Ví dụ 3.2.** Tại một điểm trên mặt một vật thể chịu lực người ta đo được biến dạng tỷ đối theo các phương om, on, ou như sau:

$$\varepsilon_m = 2,81.10^{-4} ; \varepsilon_n = -2,81.10^{-4} ; \varepsilon_u = 1,625.10^{-4}$$

Xác định phương chính và ứng suất chính tại điểm ấy. Cho biết  $\mu = 0,3$ ;  $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$ .



Hình 3.10



***Giải***

Ứng suất pháp phương m, n:

$$\varepsilon_m = \frac{1}{E}(\sigma_m - \mu\sigma_n) = \frac{1}{2.10^4}(\sigma_m - 0,3\sigma_n) = 2,81.10^{-4}$$

$$\varepsilon_n = \frac{1}{E}(\sigma_n - \mu\sigma_m) = \frac{1}{2.10^4}(\sigma_n - 0,3\sigma_m) = -2,81.10^{-4}$$

$$\Rightarrow \sigma_m = 4,32 \text{ kN/cm}^2; \sigma_n = -4,32 \text{ kN/cm}^2$$

Biến dạng theo phương u:

$$\varepsilon_u = \frac{1}{E}[\sigma_u - \mu(\sigma_m + \sigma_n - \sigma_u)] = \frac{1}{2.10^4}[\sigma_u - 0,3(4,32 - 4,32 - \sigma_u)]$$

Theo đầu bài ta có  $\varepsilon_u = 1,625.10^{-4}$

$$\Rightarrow \sigma_u = 2,5 \text{ kN/cm}^2$$

Ứng suất tiếp  $\tau_{mn}$  tìm từ công thức:

$$\sigma_u = \frac{\sigma_m + \sigma_n}{2} + \frac{\sigma_m - \sigma_n}{2} \cos 2\alpha - \tau_{mn} \sin 2\alpha$$

$$\Rightarrow 2,5 = \frac{4,32 - 4,32}{2} + \frac{4,32 + 4,32}{2} \cos 2.45^\circ - \tau_{mn} \sin 2.45^\circ$$

$$\Rightarrow \tau_{mn} = -2,5 \text{ kN/cm}^2$$

Giá trị ứng suất chính tại điểm cho trước:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} &= \frac{\sigma_m + \sigma_n}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_m - \sigma_n)^2 + 4\tau_{mn}^2} = \\ &= \frac{4,32 - 4,32}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(4,32 - 4,32)^2 + 4.2,5^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{\max} = 5 \text{ kN/cm}^2 \\ \sigma_{\min} = -5 \text{ kN/cm}^2 \end{cases}$$

Phương chính:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_{mn}}{\sigma_m - \sigma_n} = \frac{2.2,5}{4,32 + 4,32} \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 15^\circ \\ \alpha_2 = 105^\circ \end{cases}$$