Chương 12. TẢI TRỌNG ĐỘNG

I. KHÁI NIỆM

1. Tải trọng tĩnh, tải trọng động

⇒ *Tải trọng tĩnh* tức là những lực hoặc ngẫu lực được đặt lên mô hình khảo sát một cách từ từ, liên tục từ không đến trị số cuối cùng và từ đó trở đi không đổi, hoặc biến đổi không đáng kể theo thời gian. Tải trọng tĩnh không làm xuất hiện lực quán tính.

⇒ Tải trọng tác dụng một cách đột ngột hoặc biến đổi theo thời gian, ví dụ những tải trọng xuất hiện do va chạm, rung động, v.v... những tải trọng này được gọi là ***tải trọng động***.

⇒ Một cách tổng quát, ta gọi *những tải trọng gây ra gia tốc có trị số đáng kể trên vật thể được xét, là những tải trọng động*.

2. Phân loại tải trọng động

⇒ Bài toán chuyển động có gia tốc không đổi w=const, ví dụ, chuyển động của các thang máy, vận thang trong xây dựng, nâng hoặc hạ các vật nặng, trường hợp chuyển động tròn với vận tốc góc quay hằng số của các vô lăng hoặc các trục truyền động.

⇒ Bài toán có gia tốc thay đổi và là hàm xác định theo thời gian w = w(t). Trường hợp gia tốc thay đổi tuần hoàn theo thời gian, gọi là ***dao động***. Ví dụ bàn rung, đầm dùi, đầm bàn để làm chặt các vật liệu, bài toán dao động của các máy công cụ, ...

⇒ Bài toán trong đó chuyển động xẩy ra rất nhanh trong một thời gian ngắn, được gọi là bài toán ***va chạm***. Ví dụ phanh một cách đột ngột, đóng cọc bằng búa, sóng đập vào đê đập chắn,

3. Các giả thiết khi tính toán. Ta chấp nhận những giả thiết sau:

a) Tính chất vật liệu khi chịu tải trọng tĩnh và tải trọng động là như nhau.

b) Chấp nhận các giả thiết về tính chất biến dạng của thanh như khi chịu tải trọng tĩnh, chẳng hạn các giả thiết về tiết diện phẳng, giả thiết về thớ dọc không tác dụng tương hỗ.

Sử dụng các kết quả, các nguyên lý về động lực học, chẳng hạn:

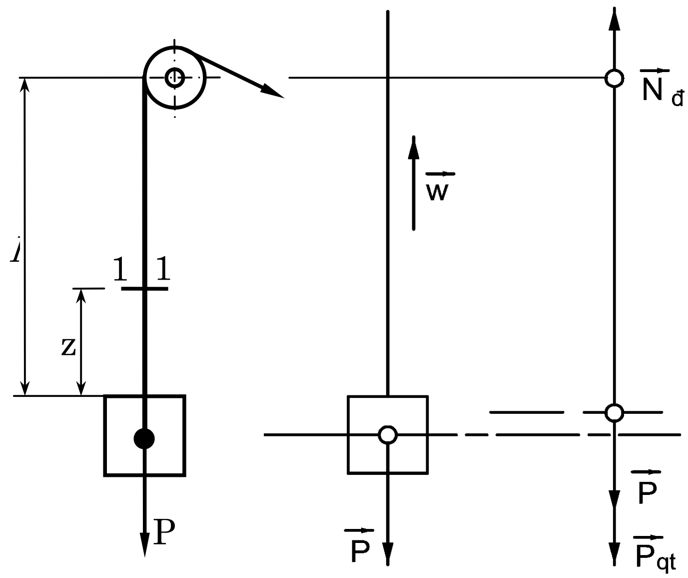
- Nguyên lý D'Alembert: $\vec{F}_{qt} = -m\vec{w}$ (12.1)
- Nguyên lý bảo toàn năng lượng: T + U = A (12.2)
- Nguyên lý bảo toàn xung lượng: Động lượng của hệ trước và sau khi va chạm là một trị số không đổi.

II. CHUYỂN ĐỘNG VỚI GIA TỐC KHÔNG ĐỔI

1. Bài toán kéo một vật nặng lên cao

⇒ Xét một vật nặng P được kéo lên theo phương thẳng đứng với gia tốc không đổi bởi một dây cáp có mặt cắt F. Trọng lượng bản thân của dây không đáng kể so với trọng lượng P (hình 8.1).

⇒ Áp dụng nguyên lí Đalămbe (d'Alembert) và phương pháp mặt cắt, chúng ta dễ dàng suy ra nội lực trên mặt cắt của dây cáp:



Hình 8.1

$$N_đ = P + P_{qt}$$

$$\Rightarrow N_đ = P + \frac{P}{g}w = \left(1 + \frac{w}{g}\right)P = K_đ P \qquad (12.3)$$

Với $K_đ = 1 + \dfrac{w}{g}$

⇒ Khi gia tốc w = 0, thì $K_đ = 1$ và $N_đ = N_t = P$.

⇒ Tải trọng N_t (khi không có gia tốc) *là tải trọng tĩnh*, tải trọng $N_đ$ (khi có gia tốc) là *tải trọng động*:

$$N_đ = K_đ N_t.$$

⇒ ứng suất mặt cắt của dây khi không có gia tốc σ_t, khi có gia tốc là *ứng suất động $\sigma_đ$.* Vì dây chịu kéo đúng tâm, nên:

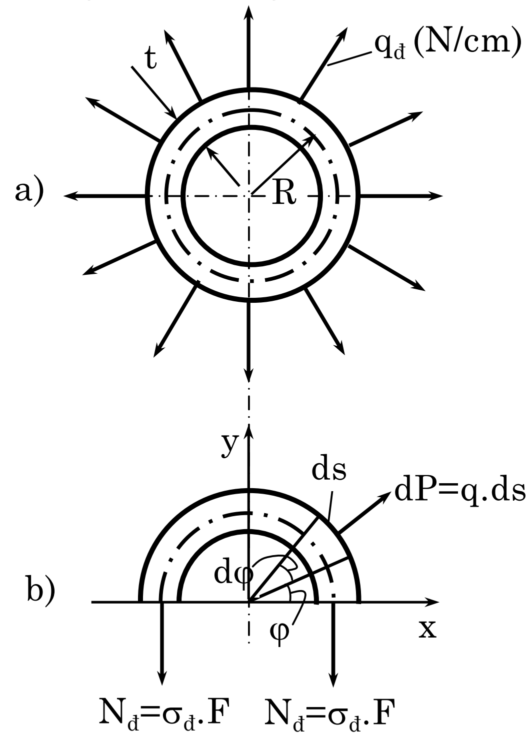
$$\sigma_đ = \frac{N_đ}{F} = K_đ\frac{N_t}{F} = K_đ\sigma_t \qquad (12.4)$$

⇒ Các công thức (12.3) và (12.4) cho thấy: *bài toán với tải trọng động tương đương như bài toán với tải trọng tĩnh lớn hơn $K_đ$ lần.* Hệ số $K_đ$ được gọi là *hệ số động* hay *hệ số tải trọng động*.

⇒ Kết luận: "Như vậy, nói chung, những yếu tố khác nhau giữa tải trọng động và tải trọng tĩnh được xét đến bằng hệ số động và việc giải các bài toán với tải trọng động quy về việc xác định các *hệ số động* đó".

2. Chuyển động quay với vận tốc không đổi

⇒ Xét vô lăng có bề dày t rất bé so với đường kính trung bình D = 2R quay với vận tốc góc ω không đổi (hình 12-2a). Vô lăng có diện tích mặt cắt ngang F, trọng lượng riêng của vật liệu là γ. Tính ứng suất động của vô lăng.



Hình 12-2

⇒ Để đơn giản, ta bỏ qua ảnh hưởng của các nan hoa và trọng lượng bản thân vô lăng. Như vậy, trên vô lăng chỉ có lực ly tâm tác dụng phân bố đều $q_đ$

⇒ Vì vô lăng quay với vận tốc góc ω = const, nên gia tốc góc $\dot{\omega} = 0$. Vậy gia tốc tiếp tuyến $w_t = \dot{\omega}R = 0$ và gia tốc pháp tuyến $w_n = \omega^2 R$

⇒ Trên một đơn vị chiều dài có khối lượng γF, cường độ của lực ly tâm là:

$$q_đ = \frac{\gamma F}{g} W_n = \frac{\gamma F}{g}\omega^2 R = \frac{\gamma FR}{g}\omega^2$$

⇒ Nội lực trên mặt cắt ngang: tưởng tượng cắt vô lăng bởi mặt cắt xuyên tâm. Do tính chất đối xứng, trên mọi mặt cắt ngang chỉ có thành phần nội lực là lực dọc $N_đ$, ứng suất pháp $\sigma_đ$ được coi là phân bố đều (vì bề dầy t bé so với đường kính). (hình 12-2b)

⇒ Lập tổng hình chiếu các lực theo phương y, ta được:

$$2.N_đ = \int_0^x q_đ.ds.\sin\varphi d\varphi = \frac{\gamma FR^2}{g}.\omega^2 \int_0^x \sin\varphi d\varphi = 2\frac{\gamma FR^2}{g}.\omega^2$$

⇒ Ứng suất kéo $\sigma_đ$ trong vô lăng là: $\boxed{\sigma_đ = \frac{\gamma\omega^2 R^2}{g}}$ (12.5)

⇒ <u>Nhận xét: ứng suất trong vô lăng $\sigma_đ$ tăng rất nhanh nếu tăng ω hay R</u>.

⇒ Điều kiện bền khi tính vô lăng là: $\boxed{\sigma_đ = \frac{\gamma\omega^2 R^2}{g} \le [\sigma]_k}$

trong đó $[\sigma]_k$: ứng suất cho phép khi kéo của vật liệu

⇒ <u>*Ghi chú*</u> :Chu kỳ T là khoảng thời gian thực hiện một dao động (s). Tần số f là số dao động trong 1 giây (hertz). Tần số vòng (tần số riêng): số dao động trong 2π giây: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

III. DAO ĐỘNG CỦA HỆ ĐÀN HỒI

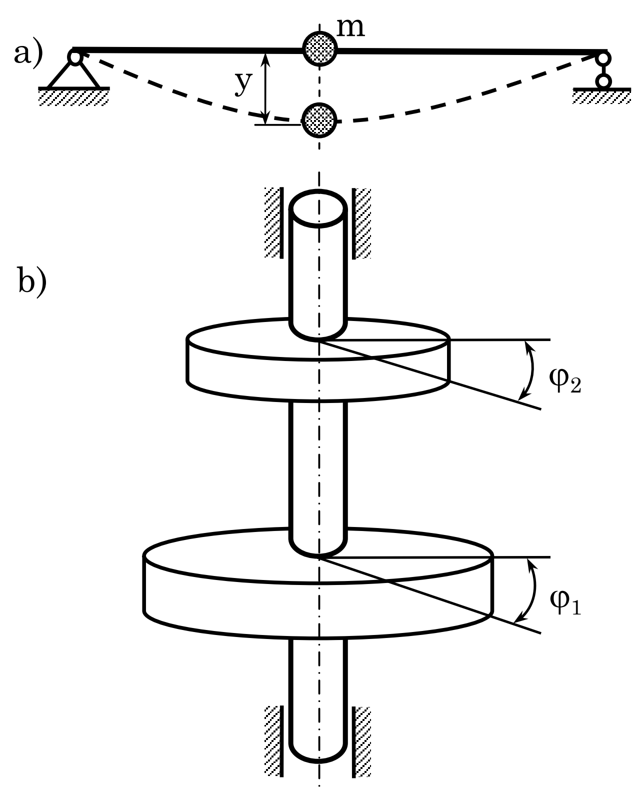
1. Khái niệm chung về dao động

⇒ Khi nghiên cứu về dao động của hệ đàn hồi, trước tiên ta cần có khái niệm về ***bậc tự do***: bậc tự do của một hệ đàn hồi khi dao động là số thông số độc lập để xác định vị trí của hệ.

⇒ Ví dụ: hình 12-3a, nếu bỏ qua trọng lượng của dầm thì hệ có 1 bậc tự do (chỉ cần biết tung độ y của khối lượng m xác định vị trí của vật m). Nếu kể đến trọng lượng của dầm ⇒ hệ có vô số bậc tự do vì cần biết vô số tung độ y để xác định mọi điểm trên dầm.

⇒ Trục truyền mang hai puli (hình 12-3b). Nếu bỏ qua trọng lượng của trục ⇒ 2 bậc tự do (chỉ cần biết hai góc xoắn của hai puli ta sẽ xác định vị trí của hệ).

⇒ Khi tính phải ***chọn sơ đồ tính***, dựa vào mức độ gần đúng cho phép giữa sơ đồ tính và hệ thực đang xét.



Hình 12.3

⇒ Ví dụ: nếu khối lượng m >> so với khối lượng của dầm ⇒ lập sơ đồ tính là khối lượng m đặt trên dầm đàn hồi không có khối lượng ⇒ hệ một bậc tự do. Nếu trọng lượng của khối lượng m không lớn so với trọng lượng dầm, ta phải lấy sơ đồ tính là một hệ có vô số bậc tự do⇒ bậc tự do của một hệ xác định theo sơ đồ tính đã chọn, nghĩa là phụ thuộc vào sự gần đúng mà ta đã chọn khi lập sơ đồ tính.

⇒ Dao động của hệ đàn hồi được chia ra:

• ***Dao động cưỡng bức***: dao động của hệ đàn hồi dưới tác dụng của ngoại lực biến đổi theo thời gian (lực kích thích).

$$P(t) \neq 0$$

• ***Dao động tự do***: dao động không có lực kích thích P(t)=0:

♦ *Dao động tự do không có lực cản*: hệ số cản β

$$\beta = 0; P(t) = 0$$

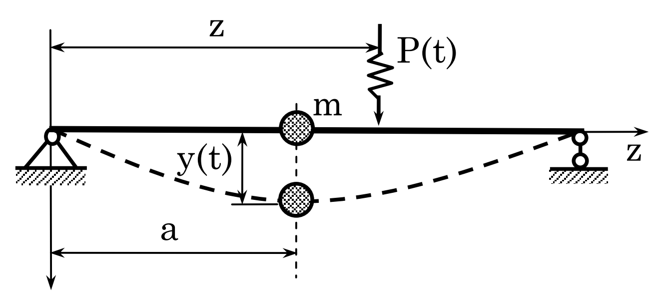
♦ *Dao động tự do có để ý đến lực cản của môi trường*: $\beta \neq 0$; $P(t) = 0$

⇒ Trọng lượng của khối lượng m được cân bằng với lực đàn hồi của dầm tác động lên khối lượng.

2. Dao động của hệ đàn hồi một bậc tự do

a) Phương trình vi phân biểu diễn dao động

⇒ Dầm mang khối lượng m (bỏ qua trọng lượng dầm). Lực kích thích P(t) biến đổi theo thời gian tác dụng tại mặt cắt ngang có hoành độ z. Tìm chuyển vị y(t) của khối lượng m theo thời gian t.



Hình 12.4

⇒ Vận tốc và gia tốc của khối lượng này là:

$$v = \dot{y}(t) = \frac{dy}{dt}; \quad a = \ddot{y}(t) = \frac{d^2y}{dt^2}$$

⇒ Chuyển vị của m do những lực sau đây gây ra: Lực kích thích P(t), lực cản ngược chiều chuyển động và tỷ lệ với vận tốc: $F_c = -\beta\dot{y}$; (β - hệ số cản), lực quán tính: $F_{qt} = -m\ddot{y}$

⇒ Gọi δ là chuyển vị gây ra do lực bằng một đơn vị tại vị trí m ⇒ chuyển vị do lực P(t) gây ra là $\delta.P(t)$, chuyển vị do lực cản gây ra là $\delta.F_c = -\delta.\beta\dot{y}(t)$, chuyển vị do lực quán tính gây ra là $-\delta.m\ddot{y}(t)$

⇒ Chuyển vị do các lực tác dụng vào hệ gây ra là

$$y(t) = \delta\left[P(t) - \beta\dot{y}(t) - m\ddot{y}(t)\right] \tag{12.6}$$

⇒ Chia (12.6) cho m.δ và đặt: $2\alpha = \dfrac{\beta}{m}; \quad \omega^2 = \dfrac{1}{m.\delta}$

⇒ Do đó ta có: $$\boxed{\ddot{y}(t) + 2\alpha\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \frac{P(t)}{m}} \tag{12.7}$$

⇒ Đây là phương trình vi phân của dao động. Hệ số α biểu diễn ảnh hưởng của lực cản của môi trường đến dao động và $\alpha < \omega$.

b) Dao động tự do không có lực cản

⇒ Dao động tự do không có lực cản: P(t) = 0, $\alpha = 0$.

⇒ Phương trình vi phân của dao động có dạng: $\boxed{\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0}$ (12.8)

⇒ Nghiệm của phương trình này có dạng: $y(t) = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$

Biểu diễn C_1 và C_2 qua hai hằng số tích phân mới là A và φ bằng cách đặt:

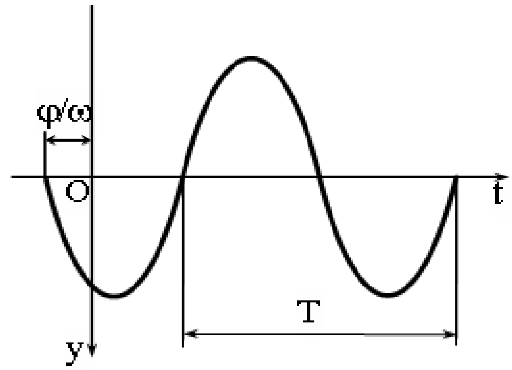
$$C_1 = A\sin\varphi; \quad C_2 = A\cos\varphi$$

⇒ Ta có phương trình dao động tự do: $y(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ (12.9)

⇒ Điều kiện ban đầu t = 0 => $y(0) = y_0$; $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$ xác định C_1 và C_2

⇒ Phương trình (12-9) cho thấy:

• Chuyển động tự do không lực cản là một dao động điều hoà có biên độ A và chu kỳ $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Đồ thị dao động hình sin như trên hình 12-5.



Hình 12.5

• Tần số dao động $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$.

• Tần số góc hay tần số dao động riêng: $\omega = 2\pi f$;

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m\delta}} = \sqrt{\frac{g}{mg\delta}} = \sqrt{\frac{g}{y_0}} \text{ (Hert = 1/s)}$$

c) Dao động tự do có kể đến lực cản

⇒ Vì P(t) = 0, $\alpha \neq 0$, khi đó phương trình vi phân của dao động là:

$$\boxed{\ddot{y}(t) + 2\alpha\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0} \qquad (12.10)$$

⇒ Với điều kiện hạn chế $\alpha < \omega$ (lực cản không quá lớn), nghiệm có dạng:

$$y(t) = Ae^{-\alpha t}\sin(\omega_1 t + \varphi) \qquad (12.11)$$

⇒ Dao động là hàm tắt dần theo thời gian với tần số góc:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2} < \omega$$

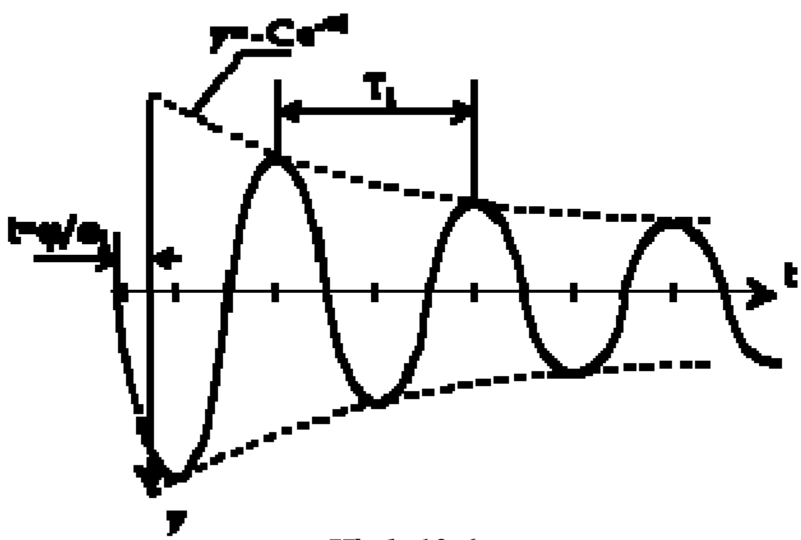
⇒ Chu kỳ dao động: $T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_1} = \dfrac{2\pi}{\omega}\sqrt{\dfrac{1}{1 - \dfrac{\alpha^2}{\omega^2}}}$

⇒ Dạng dao động được biểu diễn trên hình 12.6, biên độ dao động giảm dần theo thời gian, bởi vậy ta gọi là dao động tự do tắt dần. Khi lực cản càng lớn, tức là hệ số α càng lớn thì sự tắt dần càng nhanh.

Sau mỗi chu kỳ T_1, biên độ dao động giảm với tỉ số:

$$\frac{e^{-\alpha t}}{e^{-\alpha(t+T_1)}} = e^{\alpha T_1} = \text{const}$$

tức là giảm theo cấp số nhân



Hình 12.6

3. Dao động cưỡng bức - hiện tượng cộng hưởng

⇒ Dao động cưỡng bức: xét lực P(t) biến thiên tuần hoàn theo thời gian:

$$P(t) = P_o \sin\Omega t$$

⇒ Lực cưỡng bức bất kỳ có thể khai triển theo chuỗi Fourier ⇒ trường hợp riêng mà ta nghiên cứu không làm giảm tính tổng quát của kết quả.

⇒ Phương trình vi phân dao động có dạng không thuần nhất:

$$\ddot{y}(t) + 2\alpha\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \frac{P_0}{m}\sin\Omega t \qquad (12.12)$$

⇒ Nghiệm tổng quát của phương trình này có dạng: $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$

⇒ Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất là biểu thức:

$$y_1 = e^{-\alpha t} C \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \qquad (12.13)$$

⇒ Còn nghiệm riêng $y_2(t)$ có dạng: $y_2(t) = C_1\sin\Omega t + C_2\cos\Omega t$

⇒ Thay y_2 vào (12.12), sau một số biến đổi ta tìm được:

$$y_2 = A_1\sin(\Omega t + \psi) \qquad (12.14)$$

với ký hiệu $A_1 = \dfrac{\delta P_0}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \dfrac{4\alpha^2\Omega^2}{\omega^4}}}$; $\psi = \arccos\left(\dfrac{\omega^2-\Omega^2}{\sqrt{\left(\omega^2-\Omega^2\right)^2 + 4\omega^2\Omega^2}}\right)$

⇒ Nghiệm tổng quát của dao động cưỡng bức:

$$y(t) = e^{-\alpha t} C \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_1\sin(\Omega t + \psi) \qquad (12.15)$$

⇒ Số hạng thứ nhất tắt dần theo thời gian, sau một thời gian đủ lớn hệ chỉ còn lại số hạng thứ hai với tần số của lực cưỡng bức Ω, biên độ A_1:

$$y(t) = A_1\sin(\Omega t + \psi) = \frac{\sin(\Omega t+\psi)}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \dfrac{4\alpha^2\Omega^2}{\omega^4}}}\delta P_0 \qquad (12.16)$$

⇒ Lượng δP_0 tương đương với giá trị chuyển vị gây ra bởi một lực tĩnh y_t, có trị số bằng biên độ lực cưỡng bức và có phương theo phương dao động:

$$y(t) = \frac{\sin(\Omega t+\psi)}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \dfrac{4\alpha^2\Omega^2}{\omega^4}}} y_t = k_đ(t) y_t \qquad (12.17)$$

trong đó $k_đ(t)$ là hệ số động, hàm này đạt cực trị $K_đ$ khi $\sin(\Omega t + \psi) = 1$.

⇒ Chuyển vị cực trị tương ứng, ký hiệu bằng $y_đ$: $\boxed{y(t) = K_đ . y_t}$ (12.18)

$$K_đ = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \dfrac{4\alpha^2\Omega^2}{\omega^4}}} \qquad (12.19)$$

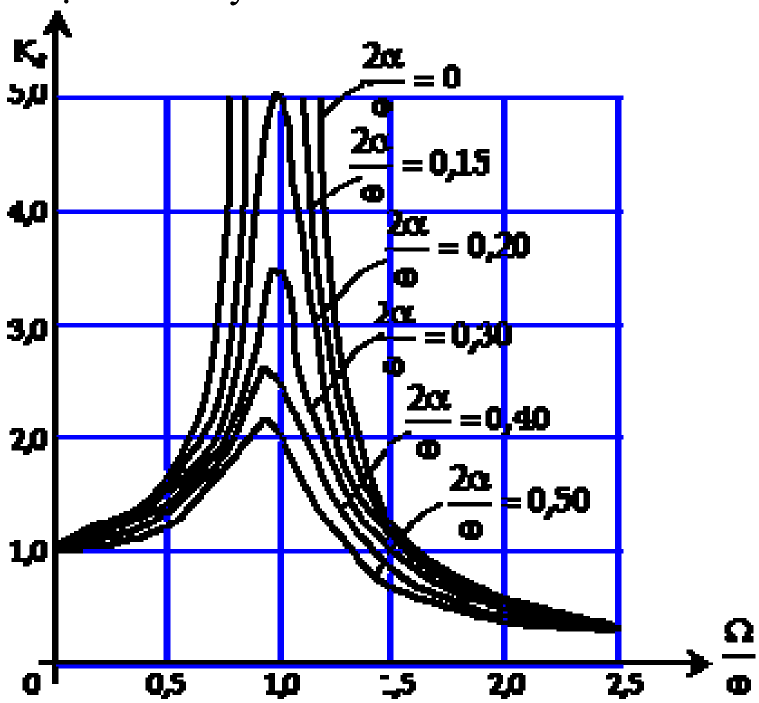
⇒ Có thể giải bài toán động bằng cách giải bài toán tĩnh rồi nhân với hệ số động $k_đ$. Ứng suất có dạng: $\boxed{\sigma_đ = k_đ.\sigma_t; \quad \tau_đ = k_đ.\tau_t}$ (12.20)

⇒ Hệ số động cực trị $K_đ$ càng lớn thì hiệu ứng động càng lớn. Hệ số này phụ thuộc vào tỷ số Ω/ω. Đồ thị quan hệ giữa $K_đ$ và Ω/ω ứng với các giá trị khác nhau của hệ số cản nhớt α được trình bày trên hình 12.7.

⇒ Để tính độ bền khi ứng suất thay đổi có thể dùng $\sigma_đ$ và $\tau_đ$ theo (12.20). Nếu trên hệ còn có tải trọng tĩnh tác dụng thì σ_{tp} là tổng ứng suất do tải trọng tĩnh và ứng suất động $\sigma_đ$, $\tau_đ$.

+ Hiện tượng cộng hưởng:

⇒ Đồ thị $K_đ$ - (Ω/ω) cho thấy: khi Ω/ω ≈ 1, nghĩa là khi tần số lực cưỡng bức trùng với tần số dao động riêng của hệ ⇒ $y_đ$ rất lớn, có thể bằng vô cùng nếu không có lực cản. Đó là hiện tượng cộng hưởng.



Hình 12.7

⇒ Thực tế tồn tại miền cộng hưởng, nằm trong khoảng $0,75 \le \frac{\Omega}{\omega} \le 1,25$; hệ số động trong miền này đạt trị số khá lớn.

⇒ Tránh hiện tượng cộng hưởng, cần cấu tạo hệ sao cho tần số dao động riêng của hệ không gần với tần số của lực cưỡng bức, chẳng hạn thay đổi khối lượng của hệ hoặc thay đổi kết cấu bằng cách thêm các thiết bị giảm chấn như lò xo, các tấm đệm đàn hồi.

+ Kết luận chung về tính toán kết cấu chịu dao động cưỡng bức

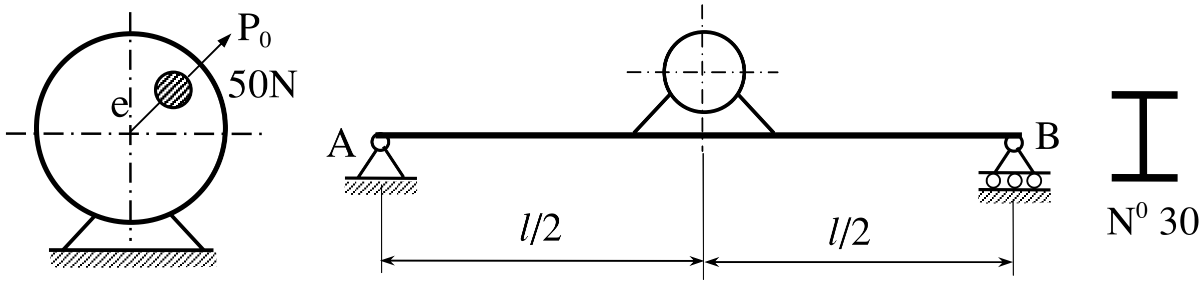
⇒ Đối với hệ đàn hồi, vật liệu tuân theo định luật Húc, ta có thể viết biểu thức (12.18) cho đại lượng nghiên cứu bất kỳ:

$$S_đ = K_đ.S_t \qquad (12.21)$$

và $$S = S_0 + S_đ = S_0 + K_đ.S_t \qquad (12.22)$$

trong đó S - đại lượng nghiên cứu có thể là chuyển vị, ứng suất, biến dạng của hệ, S_0 - đại lượng tương ứng trong bài toán tĩnh do tác động của trọng lượng m đặt sẵn trên hệ, S_t - đại lượng tương ứng trong bài toán tĩnh do tác động của một lực tĩnh, trị số bằng biên độ của lực cưỡng bức và có phương theo phương dao động, $K_đ$ - hệ số động cực trị, tính theo biểu thức (12.19).

Ví dụ 12.1: Một môtơ trọng lượng 6kN đặt tại chính giữa dầm đơn giản (hình 12.8) có chiều dài nhịp 4,5m làm từ thép I số 30, có tốc độ quay của trục n = 600 vòng/ph. Trục có trọng lượng 50 N, có độ lệch tâm e = 0,5 cm. Bỏ qua lực cản, tính ứng suất pháp lớn nhất phát sinh trên tiết diện của dầm.



Hình 12.8

Bài giải

Tốc độ góc của trục quay: $\Omega = \dfrac{2\pi n}{60} = \dfrac{2\pi.600}{60} = 62{,}85\,\text{rad/s}$.

Lực ly tâm phát sinh khi trục quay lệch tâm:

$$P_0 = \frac{1}{2}me\Omega^2 = \frac{1}{2}.\frac{50}{9{,}80}0{,}5.62{,}85^2 = 5038\text{N}$$

Lực cưỡng bức có dạng: $P(t) = P_0 \sin\Omega t$ = 5,038 sin62,85 kN.

Theo bảng thép định hình J_x=7080 cm^4; W_x=472 cm^3; E=2,1.10^4 kN/cm^2.

Độ võng ban đầu, do trọng lượng môtơ P đặt sẵn gây ra:

$$y_0 = \frac{Pl^3}{48EJ} = \frac{6.(450)^3}{48.2{,}1.10^4.7080} = 0{,}0766\text{ cm}$$

Tần số dao động riêng của dầm: $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{y_0}} = \sqrt{\dfrac{980}{0{,}0766}} = 113\ (1/\text{s})$

Hệ số động, khi bỏ qua lực cản:

$$K_đ = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2}} = \frac{1}{\left|1-\dfrac{\Omega^2}{\omega^2}\right|} = \frac{\omega^2}{\left|\omega^2-\Omega^2\right|} = \frac{113^2}{\left|113^2-62{,}85^2\right|} = 1{,}448$$

Mômen uốn lớn nhất tại tiết diện chính giữa nhịp bằng:

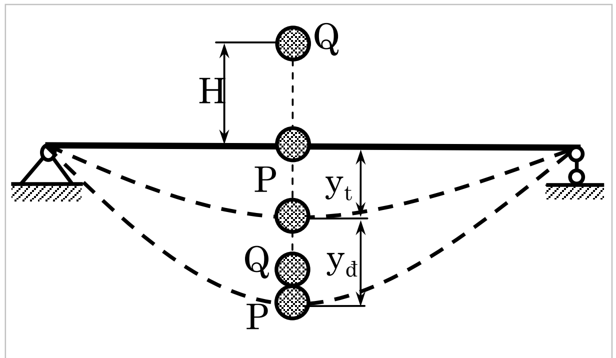
$$M = M_0 + M_đ = M_0 + K_đ M_t = \frac{Pl}{4} + K_đ\frac{P_0 l}{4} = \frac{6.4{,}5}{4} + 1{,}448\frac{5{,}038.4{,}5}{4} = 14{,}957\text{ kNm}$$

Ứng suất pháp lớn nhất trên tiết diện:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W} = \frac{1495{,}7}{472} = 3{,}17\text{kN/cm}^2$$

IV. BÀI TOÁN TẢI TRỌNG VA CHẠM

1. Va chạm đứng của hệ một bậc tự do



Hình 12.9

⇒ Va chạm: hiện tượng hai vật tác dụng vào nhau trong thời gian rất ngắn.

⇒ Các giả thuyết sau:

a) Khi chịu va chạm vật liệu vẫn tuân theo định luật Húc

b- Môđun đàn hồi E của vật liệu khi chịu tải trọng tĩnh và khi chịu va chạm là như nhau.

<u>*Các giai đoạn va chạm*</u>:

a) Giai đoạn thứ nhất: trọng lượng Q rơi vừa chạm trọng lượng P: vận tốc v_0 của trọng lượng Q trước lúc va chạm bị giảm đột ngột cho đến lúc cả hai trọng lượng P và Q cùng chuyển động với vận tốc v. Theo định luật bảo toàn động lượng: $\frac{Q}{g}v_0 = \frac{Q+P}{g}v \Rightarrow v = v_0\frac{Q}{Q+P}$

b) Giai đoạn thứ hai: cả hai trọng lượng Q và P gắn vào nhau và cùng chuyển động với vận tốc v đến lúc cả hai dừng lại do sức cản của hệ đàn hồi. Đoạn đường mà Q và P vừa thực hiện chính là chuyển vị $y_đ$ lớn nhất tại mặt cắt va chạm. Trong giai đoạn này động năng của hệ là:

$$T = \frac{1}{2}.\frac{Q+P}{g}v^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2}.\frac{Q+P}{g}\left(v_0\frac{Q}{Q+P}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{Q}{g\left(1+P/Q\right)}v_0^2$$

⇒ Khi P và Q cùng di chuyển một đoạn $y_đ$, thế năng của hệ: $\Pi = (Q+P)y_đ$

⇒ Nếu gọi U là thế năng biến dạng đàn hồi của hệ nhận được do va chạm thì theo định luật bảo toàn năng lượng ta có: $U = T + \Pi$

⇒ Thế năng biến dạng đàn hồi được tính như sau: lúc đầu trên dầm có đặt sẵn trọng lượng P, thế năng biến dạng đàn hồi lúc đó: $U_1 = \frac{1}{2}P.y_t$

⇒ trong đó: y_t là chuyển vị tĩnh tại mặt cắt va chạm do P gây ra, $y_t = P.\delta$ (δ chuyển vị tĩnh do lực bằng một đơn vị gây ra) ⇒ $U_1 = \frac{1}{2}\frac{y_t^2}{\delta}$

⇒ Khi va chạm, chuyển vị toàn phần ở mặt cắt va chạm là $(y_t + y_đ)$. Theo các giả thuyết trên, thế năng biến dạng đàn hồi lúc đó: $U_2 = \frac{1}{2}\frac{(y_t + y_đ)^2}{\delta}$

⇒ Như vậy thế năng biến dạng đàn hồi do va chạm là:

$$U = U_2 - U_1 = \frac{1}{2}\frac{(y_t + y_đ)^2}{\delta} - \frac{1}{2}\frac{y_t^2}{\delta} = \frac{y_đ^2}{2\delta} + \frac{y_t y_đ}{\delta} = \frac{y_đ^2}{2\delta} + P.y_đ$$

$\Rightarrow$ Do U = $T + \Pi$ $\Rightarrow$ $\dfrac{y_đ^2}{2\delta} + P.y_đ = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q}{g\left(1+P/Q\right)}v_0^2 + (Q+P)y_đ$

hay $$y_đ^2 - 2\delta Q y_đ - \frac{\delta Q v_0^2}{g\left(1+P/Q\right)} = 0 \qquad (12.23)$$

$\Rightarrow$ Gọi Δ_t là chuyển vị tĩnh của hệ đàn hồi tại mặt cắt va chạm do trọng lượng Q được đặt một cách tĩnh lên hệ gây ra thì tương tự như trên ta có:

$$\Delta_t = Q.\delta \rightarrow Q = \frac{\Delta_t}{\delta}$$

$\Rightarrow$ Thế vào (12.23) ta được: $y_đ^2 - 2\Delta_t y_đ - \dfrac{\Delta_t v_0^2}{g\left(1+\dfrac{P}{Q}\right)} = 0$

$\Rightarrow$ Chỉ lấy nghiệm dương của phương trình: $y_đ = \Delta_t + \sqrt{\Delta_t^2 + \dfrac{\Delta_t v_0^2}{g\left(1+\dfrac{P}{Q}\right)}} > 0$

$\Rightarrow$ Thay $v_0^2 = 2gH$, ta có: $y_đ = \Delta_t\left(1+\sqrt{1+\dfrac{2H}{\left(1+\dfrac{P}{Q}\right)\Delta_t}}\right) \qquad (12.24)$

$\Rightarrow$ Hệ số động $k_đ$, tức là số lần lớn hơn của chuyển vị động (do va chạm) đối với chuyển vị tĩnh do trọng lượng Q đặt một cách tĩnh lên hệ:

$$k_đ = \frac{y_đ}{y_t} \Rightarrow y_đ = k_đ.y_t \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_đ = 1 + \sqrt{1+\frac{2H}{\left(1+\frac{P}{Q}\right)\Delta_t}}} \qquad (12.25)$$

Các trường hợp đặt biệt:

1. Nếu trên dầm không có khối lượng P đặt sẵn thì hệ số động:

$$k_đ = 1 + \sqrt{1+\frac{2H}{\Delta_t}} \qquad (12.26)$$

2. Nếu trọng lượng Q tác dụng đột ngột vào hệ, tức là: H = 0, thì $k_đ = 2$, tức là chuyển vị động, ứng suất động lớn gấp hai lần so với bài toán tĩnh.

$\Rightarrow$ Ứng suất pháp và tiếp do tải trọng va chạm: $\sigma_đ = k_đ.\sigma_t$; $\tau_đ = k_đ.\tau_t$

$\Rightarrow$ *Nếu trên hệ còn có tải trọng tĩnh thì ứng suất động và chuyển vị động:*

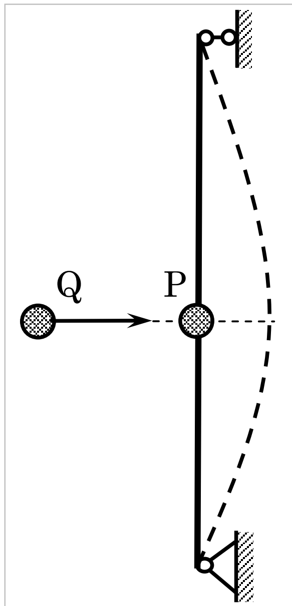
$$\sigma_đ = \sigma_đ(Q) + \sigma_t(P); \quad y_đ = y_đ(Q) + y_t(P);$$

<u>**Nhận xét**</u>: trong công thức của hệ số động, ta thấy nếu chuyển vị tĩnh y_t lớn, tức là hệ có độ cứng nhỏ thì hệ số động $k_đ$ nhỏ. Vậy muốn giảm hệ số

động ta phải giảm độ cứng của hệ hay đặt tại mặt cắt va chạm những bộ phận có độ cứng nhỏ như lò xo, ... để tăng y_t.

⇒ Khi xác định hệ số động $k_đ$ ta đã bỏ qua trọng lượng bản thân của hệ đàn hồi. Người ta đã chứng minh được rằng nếu kể đến trọng lượng bản thân của hệ thì hệ số động cũng không thay đổi nhiều. Do đó trong khi tính với tải trọng va chạm, ta không xét đến trọng lượng bản thân của hệ.

2. Va chạm ngang của hệ một bậc tự do



Hình 12.10

⇒ Va chạm ngang như hình 12.10. Quá trình va chạm vẫn thực hiện qua hai giai đoạn như trong va chạm đứng. Vì các khối lượng đều di chuyển theo phương ngang nên thế năng $\Pi = 0$. vậy theo định luật bảo toàn năng lượng:

$$T = U$$

⇒ Động năng T: $T = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q}{g\left(1+\dfrac{P}{Q}\right)}v_0^2$

⇒ Thế năng biến dạng đàn hồi mà hệ nhận được sau va chạm được tính như sau: tuy có trọng lượng P đặt trước trên dầm, nhưng P không làm dầm biến dạng ngang nên: $U_1 = 0$. Khi va chạm, chuyển vị của mặt cắt va chạm là $y_đ$ nên lúc đó thế năng biến dạng đàn hồi:

$$U_2 = \frac{1}{2}\frac{y_đ^2}{\delta} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{Q}{g\left(1+\dfrac{P}{Q}\right)}v_0^2 = \frac{1}{2}\frac{y_đ^2}{\delta} \Rightarrow y_đ^2 = \frac{\delta Q}{g\left(1+\dfrac{P}{Q}\right)}v_0^2 \qquad (12.27)$$

⇒ Nếu gọi y_t là chuyển vị tĩnh theo phương ngang ở mặt cắt va chạm do lực có giá trị bằng trọng lượng va chạm Q tác dụng tĩnh lên phương ngang:

$$\Delta_t = Q.\delta \;\rightarrow\; Q = \frac{\Delta_t}{\delta}$$

⇒ Do đó ta có thể viết biểu thức (12.27) lại như sau: $y_đ^2 = \dfrac{\Delta_t}{g\left(1+\dfrac{P}{Q}\right)}v_0^2$

⇒ Giá trị $y_đ$ chỉ lấy dấu dương, do đó $y_đ = k_đ.\Delta_t$

Với
$$k_đ = \sqrt{\frac{v_0^2}{g\left(1+\dfrac{P}{Q}\right)\Delta_t}} \qquad (12.28)$$

Ví dụ 12.2: Xác định ứng suất pháp lớn nhất trên tiết diện một cột chịu va chạm theo phương thẳng đứng cho trên hình 12.11. Bỏ qua trọng lượng của cột. Cho biết Q = 600 N; H = 6cm; E = 10^3 kN/cm^2.

Giải

Chuyển vị tĩnh bằng biến dạng dài của cột do trọng lượng Q đặt tĩnh trên cột là:

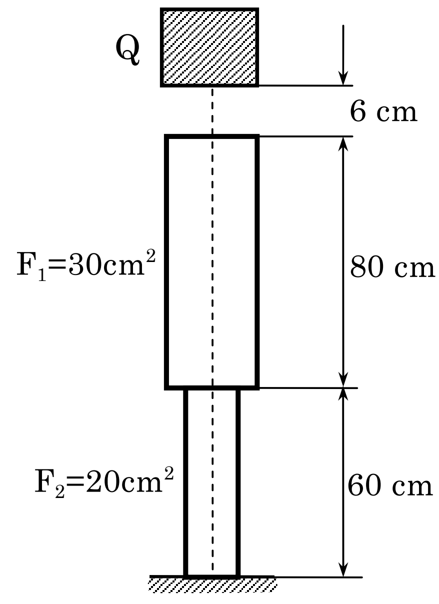
$$y_t = \Delta_t = \Delta l = \frac{Q.l_1}{EF_1} + \frac{Q.l_2}{EF_2} = 3,4.10^{-3}\,\text{cm}$$

Hệ số động: $k_đ = 1 + \sqrt{1 + \dfrac{2H}{\left(1+\dfrac{P}{Q}\right)\Delta_t}} =$

$$= 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_t}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2.6}{3,4.10^{-3}}} = 60,41$$

Ứng suất phát lớn nhất trên tiết diện:

$$\sigma_đ = k_đ.\sigma_t = k_đ.\frac{Q}{F_2} = 60,41.\frac{0,6}{20} = 1,82\text{kN/cm}^2$$



Hình 12.11

Ví dụ 12.3: Xác định hệ số động của dầm thép chữ I số 14 (hình 12.12) chịu va chạm bởi vật có trọng lượng 100 N chuyển động theo phương ngang với vận tốc v_0 = 20km/h khi không kể và khi có kể đến trọng lượng của dầm.

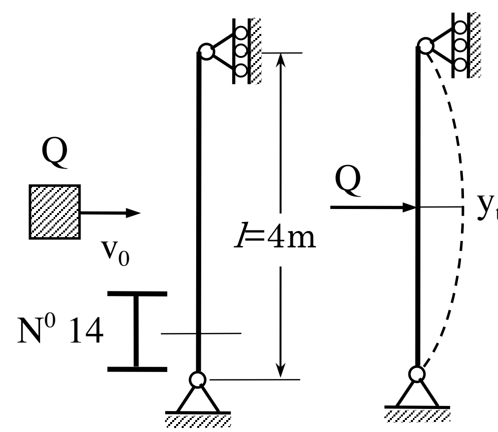
Giải

Thép chữ I số 14 ta có các đặc trưng: trọng lượng trên 1m dài là 137N, J_x = 572 cm^4, E = 2,1.10^4 kN/cm^2. Chuyển vị tĩnh:

$$y_t = \frac{Ql^3}{48EJ_x} = \frac{0,1.400^3}{48.2,1.10^4.572} = 1,1.10^{-2}\,\text{cm}$$

- Khi không kể đến trọng lượng bản thân

$$k_đ = \sqrt{\frac{v_0^2}{gy_t}} = \sqrt{\frac{555,5^2}{980.1,1.10^{-2}}} = 169$$



Hình 12.12

Khi kể đến trọng lượng bản thân, ta thu gọn trọng lượng về tiết diện va chạm ở chính giữa dầm với hệ số thu gọn là 17/35 và có trọng lượng thu gọn là P = (17/35).137.4 = 266 N

$$k_đ = \sqrt{\frac{v_0^2}{g\left(1+\dfrac{P}{Q}\right)y_t}} = \sqrt{\frac{555,5^2}{980.\left(1+\dfrac{266}{100}\right).1,1.10^{-2}}} = 88$$

Như thế trọng lượng bản thân làm giảm ảnh hưởng của va chạm. Việc không kể đến trọng lượng bản thân khiến phép tính thiên về an toàn.