Chương 10. TÍNH CHUYỂN VỊ CỦA HỆ THANH

I. CÁC KHÁI NIỆM CHUNG

⇒ Chương này sẽ trình bày một phương pháp tổng quát để tính chuyển vị của các thanh có dạng bất kỳ (như khung, thanh cong,...) chịu lực bất kỳ. Những phương pháp này dựa trên các nguyên lý về năng lượng được gọi là *phương pháp năng lượng*.

⇒ Một số các phương pháp hay sử dụng đối với hệ thanh đàn hồi tuyến tính: phương pháp dựa trên định lý Castigliano, định lý tương hỗ Betti hoặc Maxwell, công thức Maxwell-Mohr,

⇒ Khi nghiên cứu cách xác định chuyển vị của hệ thanh đàn hồi tuyến tính ta thừa nhận một số *giả thiết* sau:

- Tải trọng gây ra chuyển vị là tải trọng tác dụng tĩnh.
- Chuyển vị của hệ tuân theo nguyên lý cộng tác dụng.

⇒ Để xác định chuyển vị của hệ thanh ta có thể tiến hành theo một trong hai hướng:

- Xuất phát từ nguyên lý bảo toàn năng lượng, xác định chuyển vị theo thế năng biến dạng đàn hồi.
- Xuất phát từ nguyên lý công khả dĩ của hệ thanh.

II. TÍNH CHUYỂN VỊ THEO THẾ NĂNG BIẾN DẠNG ĐÀN HỒI

1. Công của ngoại lực, nội lực – thế năng biến dạng đàn hồi

⇒ Dưới tác dụng của ngoại lực ⇒ vật thể bị biến dạng, làm dịch chuyển điểm đặt của lực ⇒ ngoại lực sẽ sinh công - đó là ***công của ngoại lực***. Công của ngoại lực, ký hiệu là A^{ng}, là công dương vì gây ra các chuyển vị.

⇒ Công của các nội lực sinh ra trên những biến dạng đàn hồi của hệ được gọi là ***Công của nội lực***, ký hiệu là A^{n}, là công âm vì ngăn cản chuyển vị.

⇒ Theo nguyên lý bảo toàn năng lượng thì một hệ biến dạng đàn hồi ở trạng thái cân bằng sẽ thoả mãn điều kiện:

$$A^{ng} = - A^{n} \qquad (10\text{-}1)$$

⇒ Nếu lực tác dụng lên vật là tĩnh, vật làm việc trong giới hạn đàn hồi và bỏ qua các mất mát năng lượng do các hiện tượng nhiệt, điện từ, …, trong quá trình lý tưởng, theo nguyên tắc bảo toàn năng lượng ta có thể coi: toàn bộ công của ngoại lực A^{ng} được chuyển hóa thành thế năng biến dạng đàn hồi U tích lũy trong vật thể:

$$A^{ng} = U = - A^{n} \qquad (10\text{-}2)$$

Thế năng biến dạng đàn hồi được tính như sau:

⇒ Khi thanh chịu kéo (nén) đúng tâm: $U_1 = \sum_{i=1}^{n}\int_0^{l_i}\frac{N^2}{2EF}dz$ (10-3)

⇒ Khi thanh chịu uốn ngang phẳng:

$$U_2 = \sum_{i=1}^{n}\int_0^{l_i}\frac{M^2}{2EJ}dz + \sum_{i=1}^{n}\int_0^{l_i}\eta\frac{Q^2}{2GF}dz \quad (10\text{-}4)$$

trong đó η là hệ số điều chỉnh, kể tới sự phân bố không đều của ứng suất tiếp. Hệ số này phụ thuộc vào hình dạng của tiết diện, ví dụ, mặt cắt tròn η = 1,18; mặt cắt hình chữ nhật η = 1,2; tiết diện hình ống mỏng η = 2.

⇒ Khi thanh chịu xoắn: $U_3 = \sum_{i=1}^{n}\int_0^{l_i}\frac{M_z^2}{2GJ_p}dz$ (10-5)

⇒ Tổng quát thế năng biến dạng đàn hồi :

$$U = \sum_{i=1}^{n}\int_0^{l_i}\frac{N^2}{2EF}dz + \sum_{i=1}^{n}\int_0^{l_i}\frac{M^2}{2EJ}dz + \sum_{i=1}^{n}\int_0^{l_i}\eta\frac{Q^2}{2GF}dz + \sum_{i=1}^{n}\int_0^{l_i}\frac{M_z^2}{2GJ_p}dz \quad (10\text{-}6)$$

⇒ Đối với bài toán phẳng, trên các MCN của thanh chỉ có 3 thành phần nội lực: N, Q, M nên:

$$U = \sum_{i=1}^{n}\int_0^{l_i}\frac{N^2}{2EF}dz + \sum_{i=1}^{n}\int_0^{l_i}\frac{M^2}{2EJ}dz + \sum_{i=1}^{n}\int_0^{l_i}\eta\frac{Q^2}{2GF}dz \quad (10\text{-}7)$$

2. Xác định chuyển vị trực tiếp theo thế năng biến dạng đàn hồi

⇒ Phương pháp này chỉ sử dụng khi trên hệ có một lực tác dụng, ví dụ lực P. Yêu cầu xác định chuyển vị Δ có vị trí và phương tương ứng với lực P:

$$A^{ng} = \frac{1}{2}P\Delta = U \rightarrow \Delta = \frac{2U}{P} \quad (10\text{-}8)$$

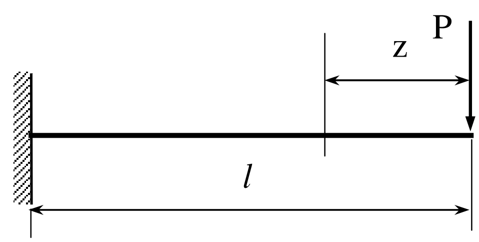
⇒ Chú ý đến (10-7), ta có thể xác định Δ theo công thức sau:

$$\Delta = \frac{2U}{P} = \frac{2}{P}\left[\sum_{i=1}^{n}\int_0^{l_i}\frac{N^2}{2EF}dz + \sum_{i=1}^{n}\int_0^{l_i}\frac{M^2}{2EJ_x}dz + \sum_{i=1}^{n}\int_0^{l_i}\eta\frac{Q^2}{2GF}dz\right] \quad (10\text{-}9)$$

⇒ ***Ví dụ 10.1***. Xác định độ võng tại đầu tự do của dầm cho trên hình 10-1. Bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc.

Trong trường hợp này ta có:

$$\Delta = \frac{2}{P}\int_0^{l}\frac{M^2}{2EJ}dz = \frac{1}{P}\int_0^{l}\frac{(Pz)^2}{EJ}dz = \frac{Pl^3}{3EJ}$$



Hình 10.1

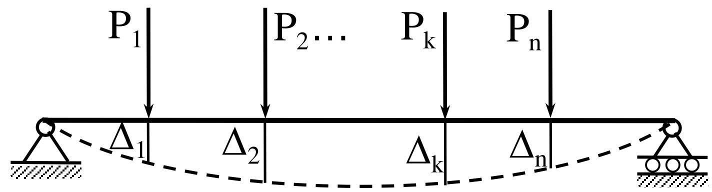
2. Xác định chuyển vị theo định lý Castigliano

⇒ Định lý Castigliano: "*Đạo hàm riêng của thế năng biến dạng đàn hồi theo một lực nào đó bằng chuyển vị theo phương tác dụng của lực đặt tại điểm đó*".

$$\boxed{\Delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}} \qquad (10\text{-}10)$$

⇒ *Chứng minh* (hình 10-2)

⇒ Giả sử tăng lượng P_k lên một lượng vô cùng bé dP_k thì độ võng của dầm tại các điểm đặt lực sẽ tăng lên các lượng $d\Delta_1, d\Delta_2,...,d\Delta_k,...,d\Delta_n$ ⇒ thế năng biến dạng đàn hồi cũng sẽ tăng lên một lượng là dU.



Hình 10-2

⇒ Nếu vật liệu làm việc trong giới hạn đàn hồi thì thế năng biến dạng là một hàm của tải trọng, do đó dU cũng là một hàm của tải trọng.

$$U = f(P_i) \Rightarrow dU = df(P_i)$$

⇒ Thế năng biến dạng U sẽ tăng một lượng là:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial P_k} dP_k \qquad (10\text{-}11)$$

⇒ Sau khi biến dạng, lực dP_k thực hiện một công là: $dA = dP_k .\Delta_k$

⇒ Theo nguyên lý bảo toàn năng lượng: dA = dU ⇒ (đpcm)

⇒ Giả sử trên dầm có mômen tập trung tác dụng, tương tự ta có biểu thức của định lý Castigliano viết cho góc xoay tại vị trí mômen tập trung là:

$$\boxed{\theta_k = \frac{\partial U}{\partial M_k}} \qquad (10\text{-}12)$$

Với U biểu diễn trong (10-7), ta có:

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^{n}\int_0^{l_i} \frac{N}{EF}\frac{\partial N}{\partial P_k}dz + \sum_{i=1}^{n}\int_0^{l_i} \frac{M}{EJ_x}\frac{\partial M}{\partial P_k}dz + \sum_{i=1}^{n}\int_0^{l_i} \eta\frac{Q}{GF}\frac{\partial Q}{\partial P_k}dz \qquad (10\text{-}13)$$

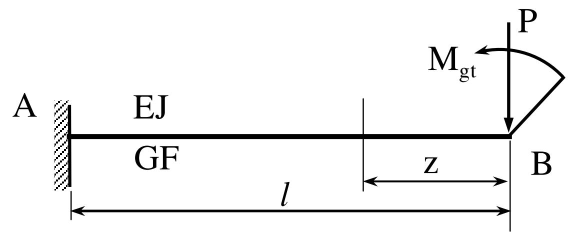
$$\theta_k = \frac{\partial U}{\partial M_k} = \sum_{i=1}^{n}\int_0^{l_i} \frac{N}{EF}\frac{\partial N}{\partial M_k}dz + \sum_{i=1}^{n}\int_0^{l_i} \frac{M}{EJ_x}\frac{\partial M}{\partial M_k}dz + \sum_{i=1}^{n}\int_0^{l_i} \eta\frac{Q}{GF}\frac{\partial Q}{\partial M_k}dz \qquad (10\text{-}14)$$

⇒ ***Chú ý***: định lý Castigliano chỉ xác định được độ võng và góc xoay ở điểm có đặt lực tập trung và mômen tập trung ⇒ muốn xác định độ võng và góc xoay tại một điểm bất kỳ không có lực tập trung và mômen tập trung thì ta đặt vào đó lực tập trung giả tạo P_{gt}=0 và mômen tập trung giả tạo M_{gt}=0.

⇒ ***Ví dụ 10.2***: xác định độ võng và góc xoay tại đầu B của dầm chịu lực như hình 10.3. Bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt.

Giải: vì không kể đến ảnh hưởng của lực cắt Q nên:

Độ võng: $\Delta_B = \int_0^l \frac{M}{EJ}\frac{\partial M}{\partial P}dz$.



Hình 10.3

Do M= -P.z => $\frac{\partial M}{\partial P} = -z$

Thay vào biểu thức trên ta được độ võng: $\Delta_B = \frac{Pl^3}{3EJ}$

Để tính góc xoay ta thêm vào mômen giả tạo M_{gt}.

Ta có: $M = M_{gt} - P.z \rightarrow \frac{\partial M}{\partial M_{gt}} = 1$

$$\theta_B = \frac{\partial U}{\partial M_{gt}} = \int_0^l \frac{M}{EJ}\frac{\partial M}{\partial M_{gt}}dz = \int_0^l \frac{1}{EJ}\left(M_{gt} - P.z\right).1.dz = -\frac{Pl^2}{EJ}; \text{ vì } M_{gt} = 0.$$

Dấu (-) chứng tỏ góc xoay tại B ngược chiều M_{gt}.

Ghi chú: nếu kể đến ảnh hưởng của lực cắt Q thì:

$$\Delta_B = \int_0^l \frac{M}{EJ}\frac{\partial M}{\partial P}dz + \int_0^l \eta\frac{Q}{GF}\frac{\partial Q}{\partial P}dz.$$

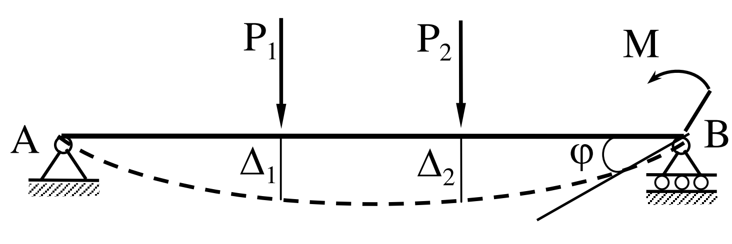
Với Q = P ⇒ $\frac{\partial Q}{\partial P} = 1 \Rightarrow \Delta_B = \frac{Pl^3}{3EJ} + \eta\frac{Pl}{GF}$

III. TÍNH CHUYỂN VỊ THEO NGUYÊN LÝ CÔNG KHẢ DĨ

3.1. Công khả dĩ của ngoại lực, nội lực, nguyên lý di chuyển khả dĩ

3.1.1 Chuyển vị khả dĩ

⇒ Chuyển vị khả dĩ hoặc biến dạng khả dĩ được hiểu là bất cứ một dạng chuyển vị hay biến dạng nào đảm bảo được các điều kiện liên kết của hệ (các điều kiện biên hình học của hệ).



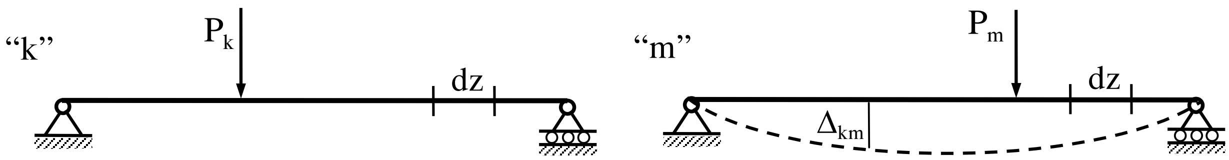
Hình 10-4

⇒ Ví dụ với hệ hình 10.4, những chuyển vị theo đường đàn hồi thoả mãn điều kiện là độ võng tại hai gối tựa bằng không là những chuyển vị khả dĩ.

3.1.2 Công khả dĩ của ngoại lực

⇒ Công khả dĩ là công sinh ra bởi các lực trên các chuyển vị và biến dạng khả dĩ do một nguyên nhân bất kỳ gây ra (có thể là tải trọng, nhiệt độ, …).

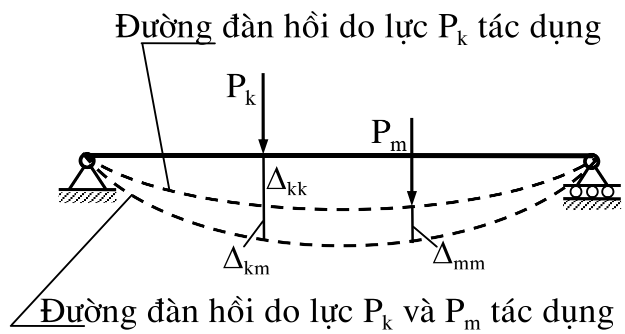
⇒ Xét một hệ đàn hồi tuyến tính ứng với hai trạng thái "k" chịu lực P_k và "m" chịu lực P_m như hình 10.5.



Hình 10-5

⇒ Ký hiệu Δ_{km} là chuyển vị khả dĩ tương ứng với lực P_k (có vị trí và phương tương ứng với lực P_k) do nguyên nhân ở trạng thái "m" gây ra.

⇒ Ví dụ trên hình 10.6: Δ_{kk} là chuyển vị theo phương của lực P_k do lực P_k gây ra chuyển vị này. Δ_{mm} là chuyển vị theo phương của lực P_m do lực P_m gây ra chuyển vị này.



Hình 10-6

⇒ Ký hiệu A_{km}^{ng} là công khả dĩ của ngoại lực ở trạng thái "k" sinh ra trên các chuyển vị tương ứng ở trạng thái "m". Ta có:

$$A_{km}^{ng} = P_k.\Delta_{km} \qquad (10\text{-}16)$$

⇒ Trong trường hợp có nhiều lực tác dụng, công khả dĩ của ngoại lực có dạng:

$$A_{km}^{ng} = \sum_i P_{ik}.\Delta_{km} \qquad (10\text{-}17)$$

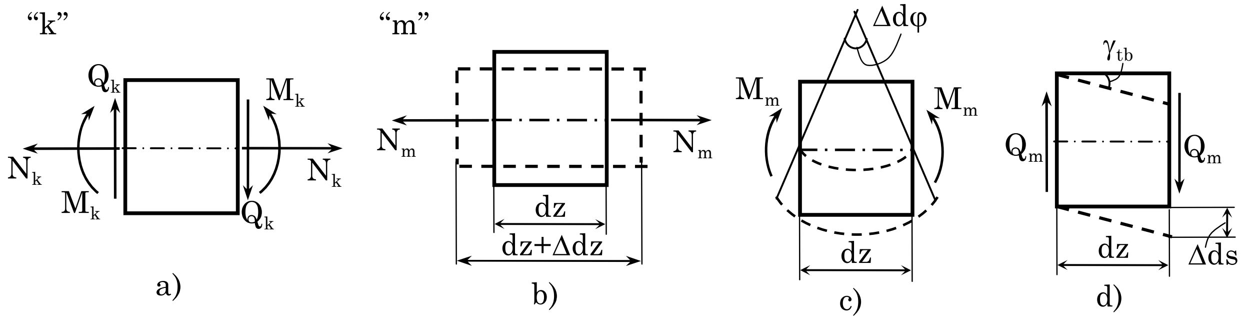
3.1.3 Nguyên lý công khả dĩ

⇒ Nếu hệ biến dạng đàn hồi cân bằng dưới tác dụng của các lực thì tổng công khả dĩ A_{km}^{ng} của các ngoại lực trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng và công khả dĩ của các nội lực A_{km}^{n} trên những biến dạng đàn hồi khả dĩ tương ứng phải bằng không, có nghĩa:

$$A_{km}^{ng} + A_{km}^{n} = 0 \text{ hay } \sum_i P_{ik}.\Delta_{km} + A_{km}^{n} = 0 \qquad (10\text{-}18)$$

3.1.4 Công khả dĩ của nội lực

⇒ Tính công khả dĩ của nội lực trên toàn chiều dài của hệ: tách khỏi hê một đoạn chiều dài dz và biểu diễn các thành phần nội lực như trên hình 10.7



Hình 10.7

⇒ Ở trạng thái "k", trên phân tố có các lực dọc N_k, mômen uốn M_k, lực cắt Q_k (hình 10.7a). Đối với phân tố đang xét các thành phần này là ngoại lực.

⇒ Ở trạng thái "m" tại vị trí tương đương cũng tách ra phân tố có chiều dài dz. Các thành phần nội lực ký hiệu là N_m, M_m, Q_m chúng gây ra các biến dạng khả dĩ (hình 10.7b,c,d).

⇒ Công khả dĩ phân tố của các lực ở trạng thái "k" trên các biến dạng khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m" là:

$$dA_{km}^{ng} = N_k \Delta dz + M_k \Delta d\varphi + Q_k \Delta ds = \left[\frac{N_k N_m dz}{EF} + \frac{M_k M_m dz}{EJ} + \eta \frac{Q_k Q_m dz}{GF} \right] \tag{10-19}$$

⇒ Theo (10-18), ta có:

$$dA_{km}^{ng} = -dA_{km}^{n} \tag{10-20}$$

⇒ Do đó công khả dĩ phân tố của các nội lực:

$$dA_{km}^{n} = -\left[\frac{N_k N_m dz}{EF} + \frac{M_k M_m dz}{EJ} + \eta \frac{Q_k Q_m dz}{GF} \right] \tag{10-21}$$

⇒ Trên toàn hệ, công khả dĩ của nội lực sẽ là:

$$A_{km}^{n} = -\left[\sum \int \frac{N_k N_m dz}{EF} + \sum \int \frac{M_k M_m dz}{EJ} + \sum \int \eta \frac{Q_k Q_m dz}{GF} \right] \tag{10-22}$$

⇒ Từ (10-22), (10-20) và (10-17) ta có:

$$\sum_i P_{ik} . \Delta_{km} = \sum \int \frac{N_k N_m dz}{EF} + \sum \int \frac{M_k M_m dz}{EJ} + \sum \int \eta \frac{Q_k Q_m dz}{GF} \qquad (10\text{-}22)$$

⇒ Công thức trên biểu thị sự cân bằng giữa công khả dĩ của ngoại lực tác dụng lên hệ ở trạng thái "k" trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m" với công khả dĩ của nội lực ở trạng thái "k" trên những biến dạng khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m".

3.2 Các định lý tương hỗ

3.2.1 Định lý Betti về sự tương hỗ của công khả dĩ của ngoại lực (1872)

⇒ Công khả dĩ của các ngoại lực ở trạng thái “k” trên các chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái “m”:

$$\sum_i P_{ik}.\Delta_{km} = \sum\int \frac{N_k N_m dz}{EF} + \sum\int \frac{M_k M_m dz}{EJ} + \sum\int \eta \frac{Q_k Q_m dz}{GF} \qquad \text{(a)}$$

⇒ Công khả dĩ của các ngoại lực ở trạng thái “m” trên các chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái “k”:

$$\sum_j P_{jm}.\Delta_{mk} = \sum\int \frac{N_m N_k dz}{EF} + \sum\int \frac{M_m M_k dz}{EJ} + \sum\int \eta \frac{Q_m Q_k dz}{GF} \qquad \text{(b)}$$

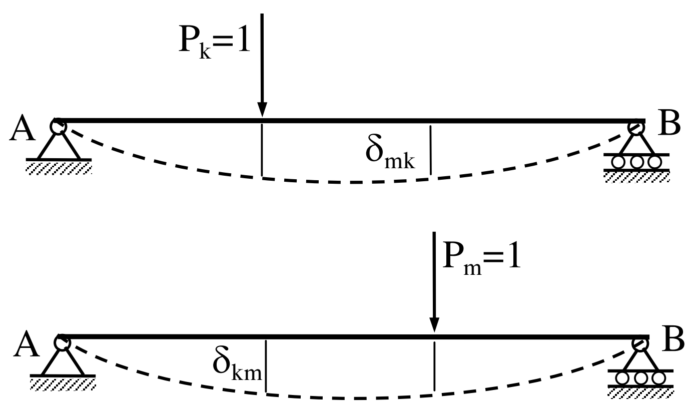
⇒ So sánh (a) và (b) ta được:

$$\sum_i P_{ik}.\Delta_{km} = \sum_j P_{jm}.\Delta_{mk} \qquad (10\text{-}24)$$

⇒ “*Đối với hệ đàn hồi tuyến tính, công khả dĩ của ngoại lực tác dụng lên hệ ở trạng thái “k” trên những chuyển vị khả dĩ ở trạng thái “m” sẽ bằng công khả dĩ của ngoại lực tác dụng lên hệ ở trạng thái “m” trên những chuyển vị khả dĩ ở trạng thái “k”*.

3.2.2 Định lý Maxwell về sự tương hỗ của các chuyển vị đơn vị (1864)

⇒ Nếu hệ ở trạng thái “k” ta chỉ đặt một lực đơn vị theo phương k, ký hiệu $P_k = 1$ và nhận được chuyển vị δ_{mk} theo phương m. Nếu hệ ở trạng thái “m” ta chỉ đặt một lực đơn vị $P_m = 1$ theo phương m và nhận được chuyển vị δ_{km} theo phương k (hình 10-8).



Hình 10-8

⇒ Theo định lý Betti ta có:

$$\delta_{km} = \delta_{mk} \qquad (10\text{-}25)$$

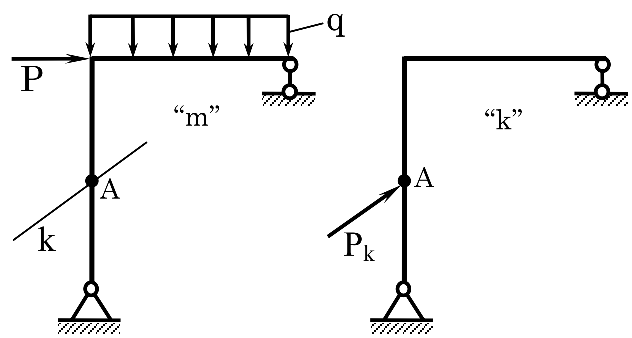
⇒ Như vậy chuyển vị đơn vị theo phương của lực P_k do lực $P_m = 1$ gây ra bằng chuyển vị đơn vị theo phương của lực P_m do lực P_k gây ra.

⇒ Dựa vào thế năng biến dạng đàn hồi người ta có thể giải được nhiều bài toán sức bền vật liệu như tính chuyển vị của các hệ thanh phức tạp, giải hệ siêu tĩnh, xác định lực tới hạn trong ổn định... Các phương pháp giải trên được gọi chung là ***phương pháp năng lượng***.

3.3. Công thức MAXWELL - MOHR

⇒ Bài toán phẳng: trạng thái chịu lực của khung như đã cho là trạng thái "m", lực và chuyển vị của trạng thái này có kèm theo chỉ số m (hình 10.9).

⇒ Xác định chuyển vị theo phương k của trọng tâm MCN tại A. Muốn vậy tạo một trạng thái chịu lực "k" mới bằng cách bỏ tất cả ngoại lực ban đầu tác dụng lên hệ và đặt theo phương k một lực P_k có giá trị và chiều tuỳ ý. Để đơn giản ta thường chọn $P_k = 1$ và trạng thái này được gọi là trạng thái đơn vị.



Hình 10.9

⇒ Công A_{km} của lực P_k trên chuyển vị Δ_{km} là:

$$A_{km} = P_k.\Delta_{km} = \sum\int\frac{N_kN_m dz}{EF} + \sum\int\frac{M_kM_m dz}{EJ} + \sum\int\eta\frac{Q_kQ_m dz}{GF} \qquad (10\text{-}26)$$

⇒ Chia cả hai vế của biểu thức này cho P_k, đồng thời ký hiệu:

$$\overline{N}_k = \frac{N_k}{P_k}; \quad \overline{M}_k = \frac{M_k}{P_k}; \quad \overline{Q}_k = \frac{Q_k}{P_k}$$

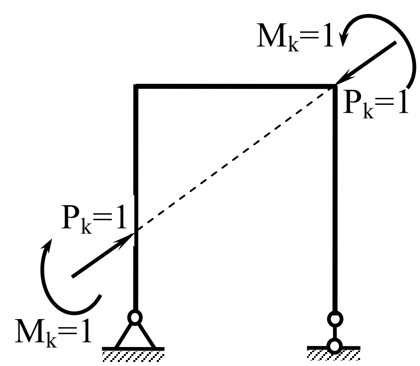
trong đó $\overline{N}_k$, $\overline{M}_k$, $\overline{Q}_k$ - nội lực do $P_k = 1$ gây ra ở trạng thái "k".

⇒ Công thức tổng quát tính chuyển vị hệ đàn hồi tuyến tính:

$$\Delta_{km} = \sum\int\frac{\overline{N}_kN_m dz}{EF} + \sum\int\frac{\overline{M}_kM_m dz}{EJ} + \sum\int\eta\frac{\overline{Q}_kQ_m dz}{GF} \qquad (10\text{-}27)$$

Công thức Mo giúp ta xác định chuyển vị theo các phương của thanh có dạng bất kỳ. Muốn xác định chuyển vị thẳng tại một điểm nào đó của trục thanh, ta đặt tại điểm đó một lực tập trung đơn vị, còn muốn xác định chuyển vị góc (góc xoay) thì ta đặt mômen tập trung đơn vị.

⇒ Muốn xác định chuyển vị tương đối giữa các điểm hoặc giữa các mặt cắt khác nhau của thanh, ta đặt hai lực đơn vị có phương trùng với đường thẳng nối hai điểm đó nhưng ngược chiều nhau. Muốn xác định góc xoay tương đối giữa hai mặt cắt đó thì ta đặt hai mômen đơn vị ngược chiều nhau, các lực đơn vị trong trường hợp này được gọi là lực đơn vị tổng quát, các chuyển vị tương đối gọi là chuyển vị tổng quát (hình 10.10).



Hình 10.10

⇒ **<u>Tóm lại</u>**, chuyển vị của thanh theo công thức Mo xác định như sau:

1. Viết biểu thức nội lực M_m , N_m, Q_m do tải trọng gây ra trên thanh

2. Đặt các lực đơn vị theo các phương cần tính chuyển vị. Nếu chuyển vị cần tính là chuyển vị thẳng thì lực đơn vị là lực tập trung, nếu chuyển vị cần tính là góc xoay thì lực đơn vị là mômen tập trung.

3. Viết biểu thức nội lực $\overline{N}_k$, $\overline{M}_k$, $\overline{Q}_k$ do lực đơn vị gây ra (tại các MCN tương ứng với các MCN đã tính M_m, N_m, Q_m)

4. Thay các biểu thức M_m , N_m, Q_m , $\overline{N}_k$, $\overline{M}_k$, $\overline{Q}_k$ vào công thức (10-27) ta tính được các chuyển vị cần tìm.

5. Nếu Δ_{km} dương thì chiều của chuyển vị trùng với chiều của lực đơn vị, nếu Δ_{km} âm thì ngược lại.

⇒ Đối với bài toán không gian, nếu trên MCN của thanh có đầy đủ 6 thành phần nội lực thì công thức Mo sẽ có dạng:

$$\Delta_{km} = \sum\int\frac{\overline{N}_{zk}N_{zm}dz}{EF} + \sum\int\frac{\overline{M}_{xk}M_{xm}dz}{EJ_x} + \sum\int\frac{\overline{M}_{yk}M_{ym}dz}{EJ_y} +$$

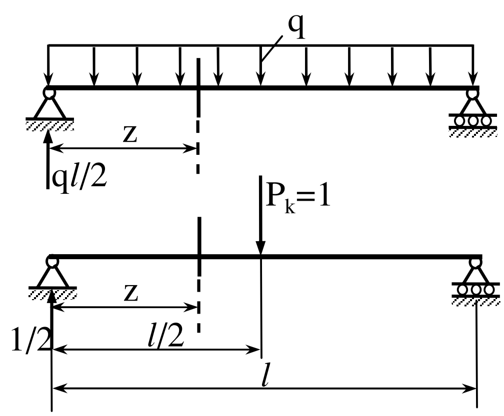
$$+\sum\int\eta_x\frac{\overline{Q}_{xk}Q_{xm}dz}{GF} + \sum\int\eta_y\frac{\overline{Q}_{yk}Q_{ym}dz}{GF} + \sum\int\frac{\overline{M}_{zk}M_{zm}dz}{GJ_p} \qquad (10\text{-}28)$$

M_{ym} , M_{xm} , M_{zm} , N_{zm} , Q_{xm} , Q_{ym} là các nội lực trên MCN do tải trọng gây ra còn $\overline{N}_{zk}, \overline{M}_{xk}, \overline{M}_{yk}, \overline{M}_{zk}, \overline{Q}_{xk}, \overline{Q}_{yk}$ là các nội lực do tải trọng đơn vị gây ra.

Ví dụ 10.3: cho dầm chịu lực như hình 10.11. Xác định độ võng ở giữa nhịp. Bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt.

Giải: trạng thái chịu lực của dầm như đã cho là trạng thái "m". Biểu thức mômen uốn tại MCN: $M_m = \frac{1}{2}q(lz - z^2)$

Để tính độ võng tại giữa nhịp ta tạo ra trạng thái "k" bằng cách đặt tại đó lực P_k = 1 theo chiều chuyển vị cần tính. Biểu thức mômen uốn: $\overline{M}_k = \frac{1}{2}z$



Hình 10.11

Thay vào (10-27), ta được (bỏ qua lực dọc, cắt): $y\left(\frac{1}{2}\right) = \Delta_{km} = 2\int_0^{l/2}\frac{1}{EJ}.\frac{1}{2}q(l.z - z^2)\frac{1}{2}z.dz = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EJ}$

(Phải lấy tích phân từ 0 → l/2 và từ l/2 → l, nhưng do hai tích phân này bằng nhau nên lấy một tích phân rồi nhân cho 2).

IV. PHƯƠNG PHÁP NHÂN BIỂU ĐỒ VÊRÊSAGHIN

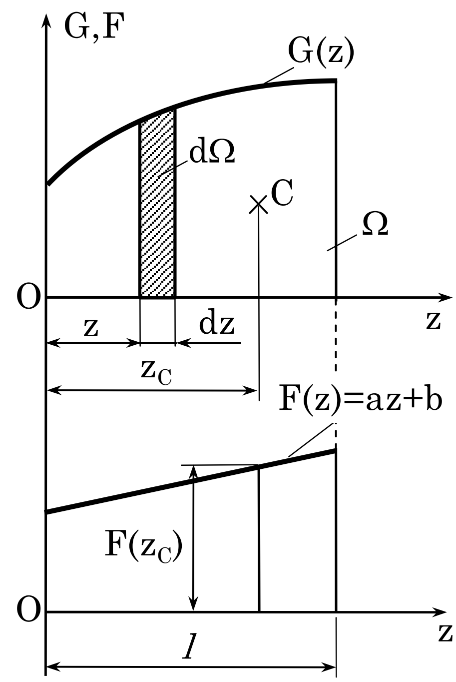
⇒ Xác định chuyển vị của các thanh có độ cứng không đổi, theo công thức Mo khá phức tạp. Đối với hệ thanh thẳng, ta thấy ít nhất một hàm nội lực dưới dấu tích phân là bậc nhất hoặc hằng số.

⇒ Nếu một trong hai hàm số dưới dấu tích phân có dạng bậc nhất thì ta có thể thay cách giải tích phân trên bằng phương pháp nhân biểu đồ của Vêrêsaghin.

⇒ Giả thiết trên đoạn chiều dài l nào đó của thanh, hàm số G(z) có dạng bất kỳ còn F(z) có dạng bậc nhất: $\boxed{F(z) = (az + b)}$

⇒ Tích phân $\int \frac{\overline{M}_k M_m dz}{EJ} = \int F(z).G(z)dz$,

trong đó $F(z) = \overline{M}_k$ còn $G(z) = \frac{M_m}{EJ}$.



Hình 10-12

⇒ Tích phân I của hai hàm số F(z) và G(z):

$$I = \int_0^l F(z).G(z)dz = \int_0^l (az + b).G(z)dz$$

với dΩ = G(z)dz là một diện tích vô cùng nhỏ của biểu đồ G(z), ta có tích phân theo biến mới: $I = \int_\Omega (az + b)d\Omega = a\int_\Omega zd\Omega + b\int_\Omega d\Omega = a\int_\Omega zd\Omega + b\Omega$

⇒ Ta có $\int_\Omega zd\Omega = z_C\Omega$, trong đó z_C là hoành độ trọng tâm của diện tích Ω.

Khi đó tích phân I sẽ là: $I = az_C\Omega + b\Omega = \Omega(az_C + b)$

⇒ Theo hình 10-12, ta có $az_C + b = F(z_C)$ – tung độ của hàm F(z) ứng với hoành độ z_C ⇒ $\boxed{I = \Omega F(z_C)}$ (10.30)

⇒ Từ kết quả trên ta suy ra: nếu các biểu đồ nội lực M_m, N_m, Q_m do tải trọng gây ra có dạng bất kỳ, còn các biểu đồ $\overline{N}_k$, $\overline{M}_k$, $\overline{Q}_k$ do tải trọng đơn vị có dạng bậc nhất thì:

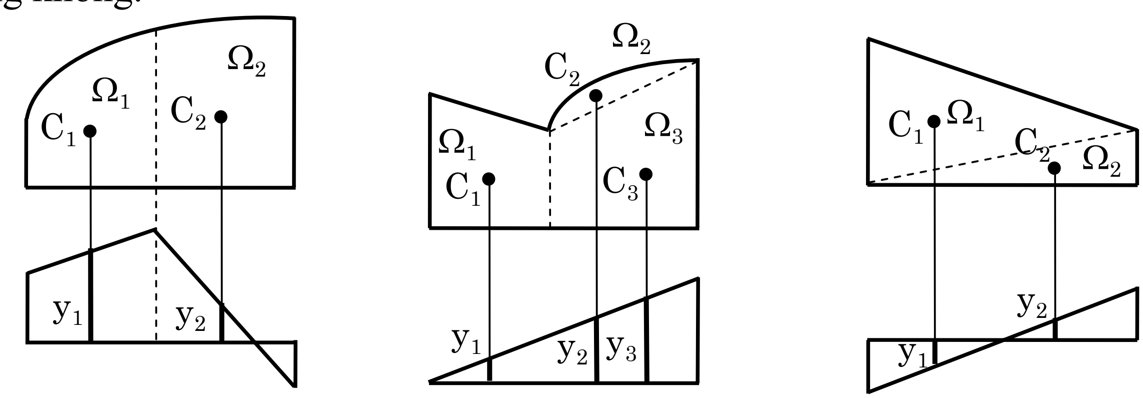
$$\boxed{\Delta_{km} = \sum \frac{1}{EJ}\Omega(M_m)\overline{M}_k(C) + \sum \frac{1}{EF}\Omega(N_m)\overline{N}_k(C) + \sum \frac{1}{GF}\eta\Omega(Q_m)\overline{Q}_k(C)} \quad (10.31)$$

trong đó $\Omega(M_m)$, $\Omega(N_m)$, $\Omega(Q_m)$ là diện tích các biểu đồ M_m, N_m, Q_m.

$\overline{M}_k(C), \overline{N}_k(C), \overline{Q}_k(C)$ là các giá trị của biểu đồ $\overline{M}_k, \overline{N}_k, \overline{Q}_k$ tại những vị trí tương ứng với trọng tâm của diện tích các biểu đồ M_m, N_m, Q_m.

<u>Cần chú ý rằng:</u>

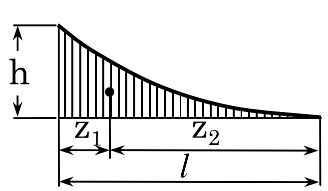
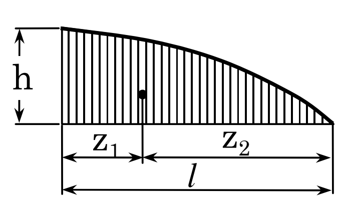
- Nếu F(z) và G(z) đều là bậc nhất thì phép nhân trên có tính hoán vị.
- Nếu chỉ có một biểu đồ là bậc nhất thì giá trị tung độ tương ứng tại trọng tâm bắt buộc phải lấy ở biểu đồ có dạng bậc nhất đó.
- Nếu đồ thị bậc nhất bị gãy khúc thì phải chia chiều dài lấy tích phân thành từng đoạn, trên mỗi đoạn đồ thị này là một đường thẳng trơn, để thực hiện phép nhân, sau đó lấy tổng kết quả phép nhân trong các đoạn.
- Nếu các biểu đồ có dạng phức tạp thì khi nhân ta chia chúng ra nhiều hình đơn giản, sau đó ta cộng các kết quả lại với nhau.
- Kết quả của phép nhân mang dấu (+) khi diện tích và tung độ đều cùng dấu hoặc cùng nằm về một phía của đường chuẩn.
- Kết quả của phép nhân biểu đồ đối xứng với biểu đồ phản đối xứng sẽ bằng không.



a) b) c)

Hình 10-13

Bảng 10.1 - diện tích và hoành độ trọng tâm của một số hình thường gặp

	Bậc 2 $\Omega = \frac{1}{3}hl\,;\ z_1 = \frac{1}{4}l\ \ z_2 = \frac{3}{4}l$ Bậc n $\Omega = \frac{1}{n+1}hl\,;\ z_1 = \frac{1}{n+2}l\,;\ z_2 = \frac{n+1}{n+2}l$
	Bậc 2 $\Omega = \frac{2}{3}hl\,;\ z_1 = \frac{3}{8}l\ \ z_2 = \frac{5}{8}l$ Bậc n $\Omega = \frac{n}{n+1}hl\,;z_1 = \frac{n+1}{3n+2}l\,;\ z_2 = \frac{3n+1}{n+2}l$

Ví dụ 10.4: Tìm độ võng tại B và góc xoay tại A của dầm chịu lực như trên hình 10.14a (bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt).

Giải

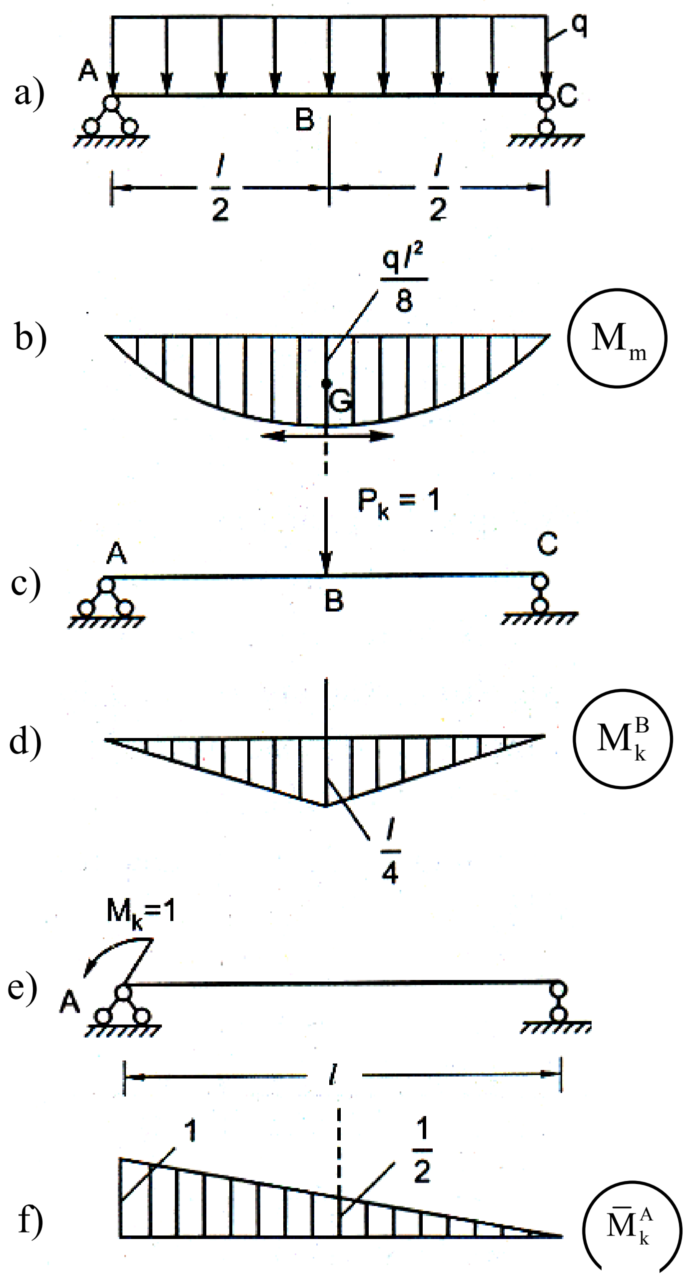
Trạng thái ″m″ là trạng thái chịu lực của dầm (hình 10.14a). Biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra M_m biểu diễn trên hình 10.14b.

Để tìm độ võng tại B ta tạo lên trạng thái ″k″ (hình 10.14c), biểu đồ mômen $\overline{M}_k^B$ được biểu diễn trên hình 10.14d.

Ở đây ta thấy trong hai đoạn AB và BC biểu đồ $\overline{M}_k^B$ được biểu diễn bằng những đường thẳng khác nhau, vì vậy để tính độ võng dùng phương pháp nhân biểu đồ Vêrêsaghin ta phải chia biểu đồ M_m theo 2 phần từ A đến B và từ B đến C. Phép nhân Vêrêsaghin cho kết quả như sau:

$$y_B = \frac{1}{EJ_x} 2.\frac{2}{3}.\frac{ql^2}{8}.\frac{l}{2}.\frac{5}{8}.\frac{l}{4} =$$

$$= \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EJ_x}$$



Hình 10.14

Để tìm góc xoay tại A ta sẽ tạo trạng thái ″k″ như hình 10.14e. Biểu đồ $\overline{M}_k^A$ được biểu diễn như hình 10.14f. Theo phép nhân Vêrêsaghin ta có:

$$\theta_A = \Delta_{km} = \frac{1}{EJ_x}.\left(-\frac{2}{3}.\frac{ql^2}{8}.l.\frac{1}{2}\right) = -\frac{ql^2}{24EJ_x}$$

Kết quả mang dấu (-) chứng tỏ là góc xoay tại A có chiều ngược lại với chiều của M_k đã chọn.

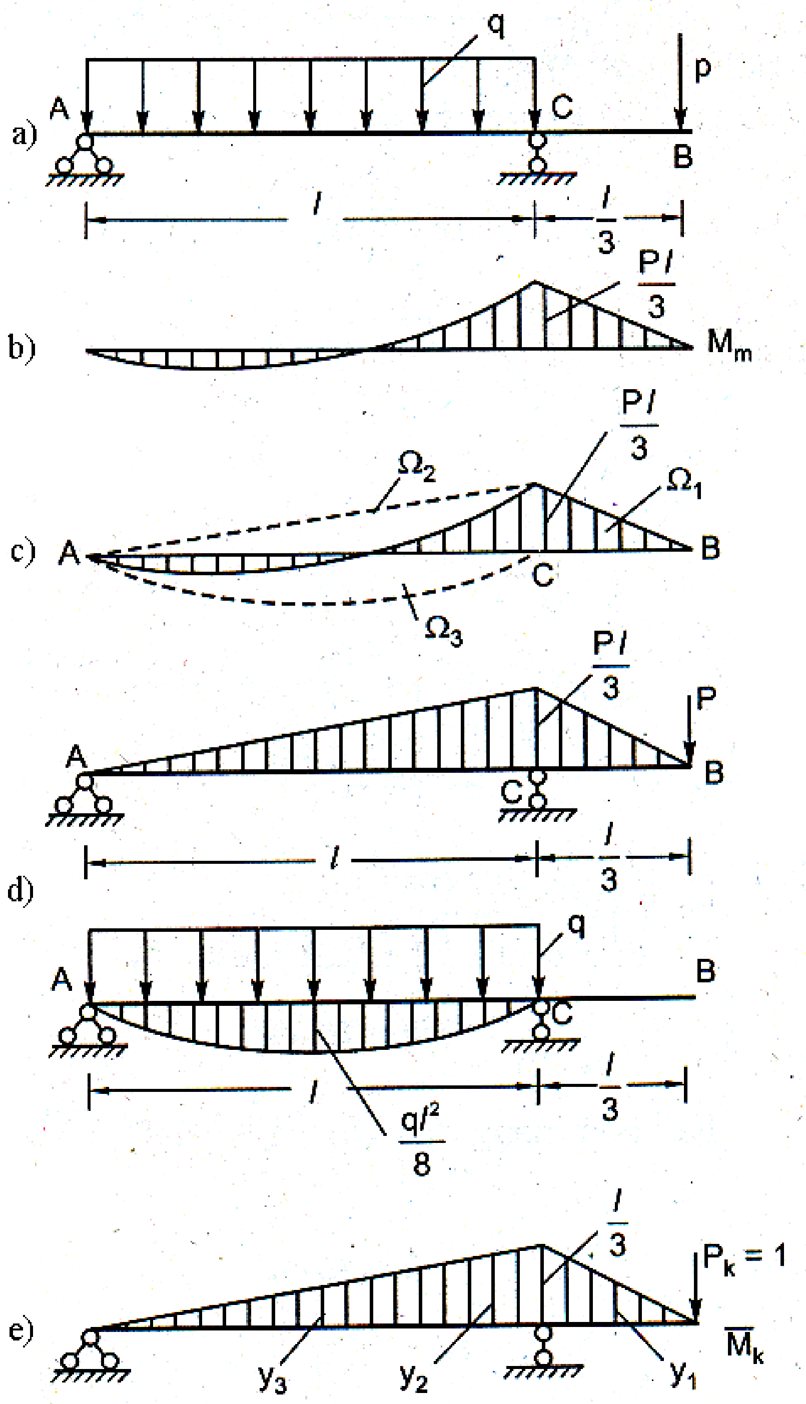
Ví dụ 10.5: Tìm độ võng tại B của dầm chịu lực như trên hình 10.15a (bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt).

Giải

Biểu đồ mômen của trạng thái ″m″ được biểu diễn trên hình 10.15b. Để đơn giản khi nhân biểu đồ ta có thể xem biểu đồ M_m trong khoảng AC là tổng cộng của một biểu đồ bậc nhấ và một đường bậc 2 (hình 10.15c). Điều đó cũng giống như chúng ta xem rằng trạng thái ″m″ là tổng cộng của hai trạng thái: trạng thái chỉ có một mình lực P tác dụng và trạng thái chỉ có một mình lực q tác dụng (hình 10.15d).

Để tìm chuyển vị tại B ta tạo ra trạng thái ″k″ như trên hình 10.15e, biểu đồ mômen cũng được biểu diễn trên hình đó.

Với cách đó ta có thể thực hiện phép nhân biểu đồ Vêrêsaghin một cách dễ dàng:



Hình 10.15

$$y_B = \Delta_{km} =$$

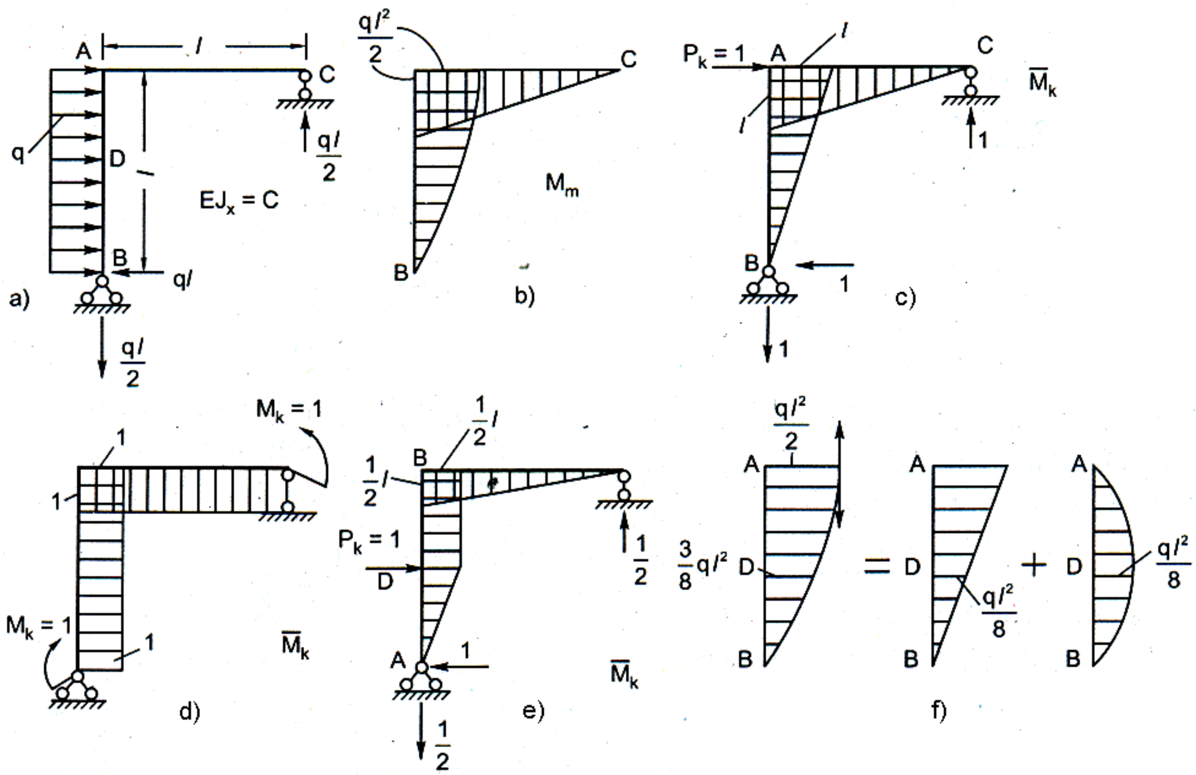
$$= \frac{1}{EJ_x}\left(\Omega_1 y_1 + \Omega_2 y_2 + \Omega_3 y_3\right) = \frac{1}{EJ_x}\left(\frac{1}{2}P\frac{l}{3}.\frac{l}{3}.\frac{2}{3}\frac{l}{3} + \frac{1}{2}P\frac{l}{3}.l.\frac{2}{3}\frac{l}{3} - \frac{2}{3}.\frac{ql^2}{8}.l.\frac{1}{2}\frac{l}{3}\right)$$

$$= \frac{4Pl^3}{81EJ_x} - \frac{ql^4}{72EJ_x}$$

Ví dụ 10.6: Tìm chuyển vị ngang tại A, D (điểm giữa AB) và góc xoay tương đối giữa hai mặt cắt tại gối tựa B và C của khung chịu lực như hình 10.16a. Bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc, lực cắt đến chuyển vị của khung.

Giải

Ta xem trạng thái chịu lực của khung là trạng thái ″m″. Biểu đồ M_m được biểu diễn trên hình 10.16b.



Hình 10.16

Để tìm chuyển vị ngang tại A ta lập trạng thái ″k″ như trên hình 10.16c. Chuyển vị ngang tại A:

$$y_A = \Delta_{km} = \sum\int \frac{\overline{M}_k M_m}{EJ_x} dz$$

$$y_A = \frac{1}{EJ_x}\left(\frac{1}{2}.\frac{ql^2}{2}.l.\frac{2}{3}l + \frac{2}{3}.\frac{ql^2}{2}.l.\frac{5}{8}l\right) = \frac{3ql^4}{8EJ_x}$$

Để tìm góc xoay tương đối giữa hai mặt cắt B và C ta tao nên trạng thái ″k″ như hình 10.16d. Bằng phép nhân biểu đồ Vêrêsaghin ta có:

$$\theta_{BC} = \Delta_{km} = \sum\int \frac{\overline{M}_k M_m}{EJ_x} dz$$

$$\theta_{BC} = \frac{1}{EJ_x}\left(\frac{1}{2}.\frac{ql^2}{2}.l + \frac{2}{3}l.\frac{ql^2}{2}\right) = \frac{7ql^3}{12EJ_x}$$

Để tính chuyển vị ngang tại D ta tạo nên trạng thái "k" như hình 10.16e. Ta nhận thấy phép nhân biểu đồ trong đoạn AB sẽ trở nên phức tạp, vì ta phải chia biểu đồ M_m đó thành hai phần trên hai đoạn AD và DB mà trọng tâm của mỗi phần ta chưa xác định. Để tránh khó khăn này ta xem biểu đồ M_m trên đoạn AB như tổng hai biểu đồ như trên hình 10.16e. Với cách đó ta thực hiện được phép nhân Vêrêsaghin một cách dễ dàng:

$$y_D = \Delta_{km} = \sum\int \frac{\overline{M}_k M_m}{EJ_x} dz$$

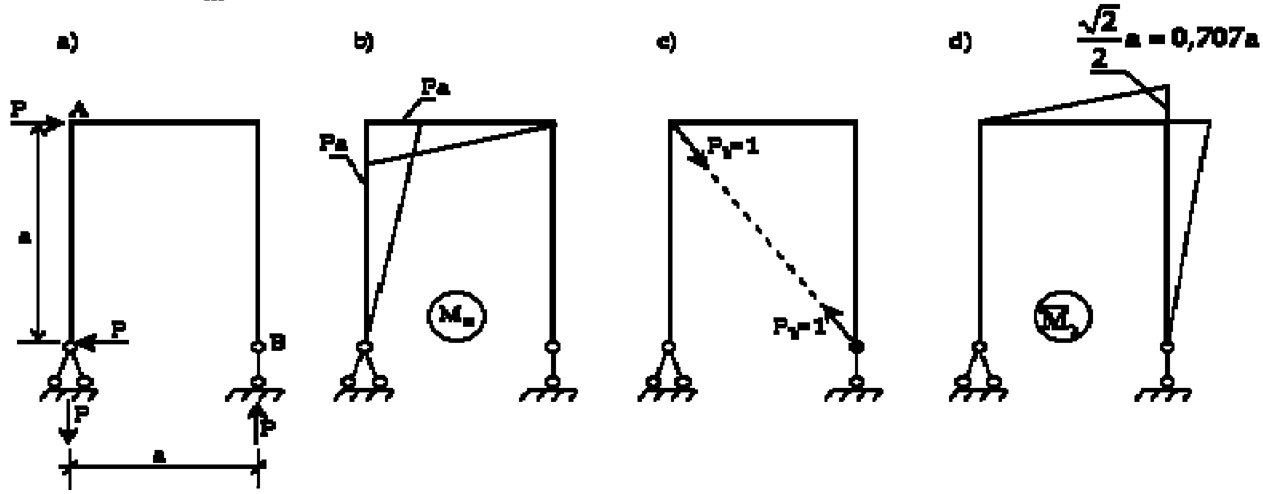
$$y_D = \frac{1}{EJ_x}\left[\frac{1}{2}\frac{ql^2}{2}.l.\frac{2}{3}.\frac{l}{2} + 2.\frac{ql^2}{2}.\frac{1}{2}\frac{2}{3}.\frac{l}{2}.\frac{l}{2} + \left(\frac{ql^2}{2} + \frac{2ql^2}{8}\right)\frac{1}{2}\frac{l}{2}.\frac{l}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3}\frac{ql^2}{8}\frac{l}{2}.\frac{l}{2} + \frac{2}{3}\frac{ql^2}{8}\frac{l}{2}\frac{5}{8}.\frac{l}{2}\right] = \frac{89ql^4}{384EJ_x}$$

Ví dụ 10.7: Cho khung chịu lực như hình vẽ (10.17a). Tính độ dịch gần tương đối giữa các trọng tâm MCN A và B. Bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt; EJ_x=const

Giải

Biểu đồ M_m như hình vẽ 10.17b.



Hình 10.17

Để tìm chuyển vị thẳng tương đối Δ_{km} giữa A và B, đặt hệ lực đơn vị P_k = 1 ngược chiều nhau như trên hình 10.17c. Biểu đồ mômen uốn $\overline{M}_k$ như trên hình 10.17d

$$\Delta_{km} = \sum_{i=1}^{n} M_m \frac{\overline{M}_k}{EJ_x} dz = -\frac{1}{2}Pa.a.\frac{1}{3}0,707a.\frac{1}{EJ_x} = -0,118\frac{Pa^3}{EJ_x}$$

Dấu (-) ở đây chứng tỏ sau biến dạng các điểm A và B xa nhau hơn so với vị trí ban đầu của chúng (ngược chiều với các lực P_k=1).