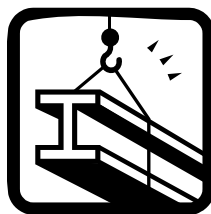
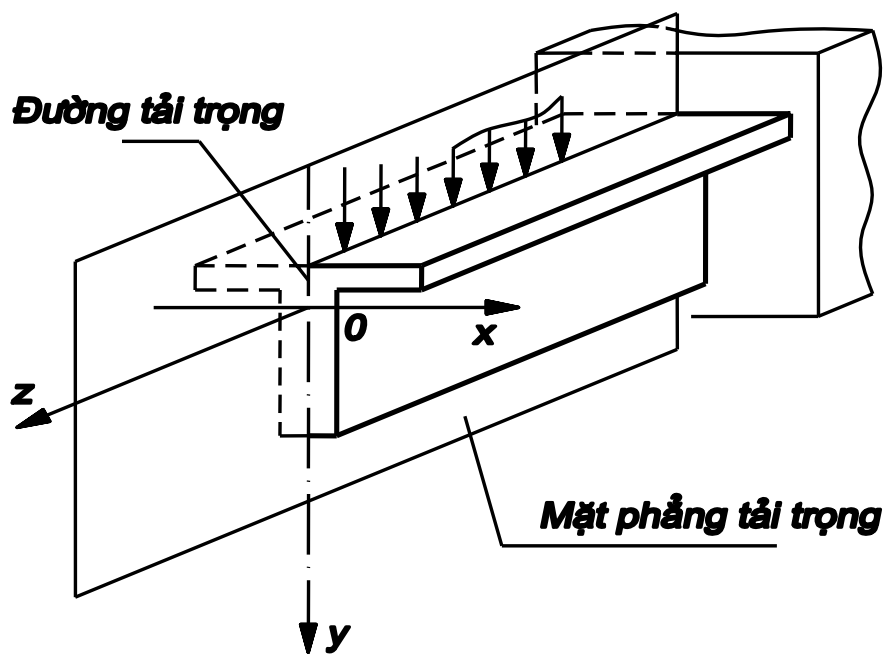


TRẦN HỮU NAM



SỨC BỀN VẬT LIỆU



Hình 6.2

Hà Nội, 2009

SỨC BỀN VẬT LIỆU

Mục đích của môn học nhằm trang bị cho sinh viên những kiến thức cơ bản về việc tính toán, thiết kế các chi tiết máy, kết cấu công trình.

Chương 1. NHỮNG KHÁI NIỆM CƠ BẢN

I. NHIỆM VỤ VÀ ĐỐI TƯỢNG CỦA SỨC BỀN VẬT LIỆU

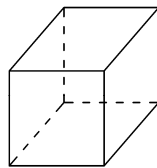
1. Nhiệm vụ

⇒ Tính toán về độ bền, độ cứng và độ ổn định của các bộ phận công trình hoặc các chi tiết máy. Khi thiết kế các bộ phận công trình hoặc các chi tiết máy, ta phải thoả mãn các điều kiện sau:

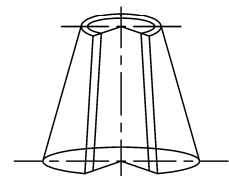
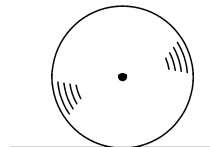
- Chi tiết không bị phá hỏng hay đảm bảo **điều kiện bền**.
- Độ biến dạng của chi tiết không vượt quá mức độ cho phép hay đảm bảo **điều kiện cứng**.
- Chi tiết luôn giữ được hình dáng ban đầu hay đảm bảo điều kiện **ổn định**.

2. Đối tượng nghiên cứu

Vật rắn biến dạng: về vật liệu là các vật thể có tính đàn hồi tuyệt đối, về mặt hình học chủ yếu là các thanh. Ngoài ra các dạng khác như: tấm, vỏ, ống dày, đĩa, v.v. Thông thường xét một trong ba cấu hình sau:



Hình 1.1

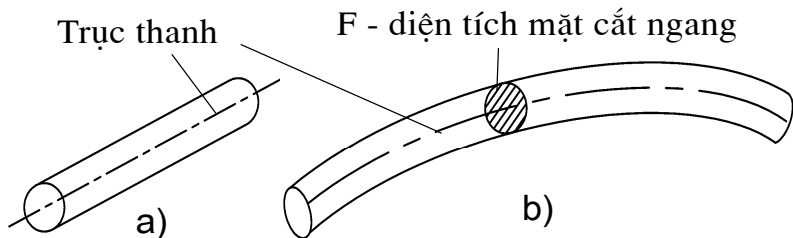


Hình 1.2

⇒ **Khối:** (hình 1.1)

⇒ **Tấm và vỏ**
(hình 1.2)

⇒ **Thanh** (hình 1.3)



Hình 1.3

II. MỘT SỐ GIẢ THUYẾT CƠ BẢN VỀ VẬT LIỆU

1. Giả thuyết về sự liên tục, đồng nhất và đẳng hướng

Dưới tác dụng của ngoại lực mọi vật rắn thực đều bị biến dạng, nghĩa là biến đổi hình dạng và kích thước, đó là vì ngoại lực làm thay đổi vị trí tương đối vốn có giữa các phân tử cấu tạo nên vật rắn ấy.

⇒ **Tính liên tục:** vật rắn được gọi là *liên tục* nếu mỗi phân tử bé tùy ý của nó đều chứa vô số chất điểm sao cho trong vật thể không có lỗ rỗng.

⇒ **Tính đồng nhất** có nghĩa là tại mọi điểm trong vật thể, vật liệu có tính chất lý - hoá như nhau.

⇒ **Tính đẳng hướng** là tính chất cơ - lý của vật liệu theo mọi phương đều như nhau.

2. Giả thuyết về sự đàn hồi

⇒ Vật rắn được gọi là *đàn hồi* (hay rõ hơn, *đàn hồi tuyệt đối*) nếu có khả năng phục hồi hoàn toàn hình dạng và kích thước vốn có sau khi ngoại lực thôi tác dụng, biến dạng được khôi phục hoàn toàn sau khi hết ngoại lực được gọi là biến dạng đàn hồi.

⇒ Vật *đàn hồi tuyến tính* là vật mà biến dạng là đàn hồi và tỉ lệ bậc nhất với nội lực. Những vật đàn hồi khác được gọi là vật *đàn hồi phi tuyến*.

3. Giả thuyết về biến dạng và chuyển vị bé

⇒ Biến dạng bé có thể hiểu là nó nhỏ đến mức như những đại lượng vô cùng bé. Chuyển vị là rất bé so với kích thước của vật thể.

⇒ Từ giả thuyết này ta có thể xem điểm đặt của ngoại lực là không thay đổi khi vật thể bị biến dạng và ta có thể viết các phương trình tĩnh và động của một vật được coi như ở trạng thái không biến dạng. Cũng từ giả thuyết cho phép áp dụng nguyên lý cộng tác dụng hay nguyên lý độc lập tác dụng đối với vật chịu tác dụng của nhiều hệ tải trọng khác nhau.

Nguyên lý cộng tác dụng phát biểu như sau: Một vật hay một hệ đàn hồi khi chịu tác dụng đồng thời của nhiều nguyên nhân khác nhau thì một đại lượng (chuyển vị, ứng suất, biến dạng) của vật sẽ bằng tổng các đại lượng đó do từng nguyên nhân riêng rẽ gây ra.

III. NGOẠI LỰC VÀ SƠ ĐỒ HÓA KẾT CẤU

1. Khái niệm ngoại lực

⇒ Ngoại lực bao gồm *tải trọng* (tĩnh và động) và các *phản lực liên kết*.

⇒ Tải trọng là ngoại lực có phương, chiều, trị số, điểm đặt và tính chất đã biết trước.

Phân loại theo đặc điểm đặt lực theo thời gian ta có *tải trọng tĩnh* (trị số thay đổi dần dần từ 0 đến một giá trị xác định, sau đó không thay đổi) và *tải trọng động* (có trị số thay đổi từ không đến giá trị cuối cùng hoặc

thay đổi theo chu kỳ không có giá trị ổn định). Tải trọng động gây ra lực quán tính, còn tải trọng tĩnh thì coi là không.

Phân loại tải trọng theo hình thức tác dụng:

- *Lực tập trung*: là những lực tác dụng tại một điểm của vật thể (lực P trên hình 1.4).
- *Lực phân bố theo chiều dài, bề mặt, thể tích*: lực tác dụng theo chiều dài, bề mặt, tác dụng trong mọi điểm của vật thể (hình 1.4)
- *Ngẫu lực tập trung (mômen tập trung)* hoặc *phân bố* (hình 1.5).

2. Liên kết và phản lực liên kết

Liên kết là những điều kiện hình học hay động học ràng buộc chuyển vị tự do của vật khảo sát. Các vật được nối với vật khảo sát làm cản trở chuyển vị của vật khảo sát gọi là vật

gây liên kết. Tác dụng tương hỗ giữa vật khảo sát và vật gây liên kết gọi là lực liên kết. Lực mà vật gây liên kết đặt vào vật khảo sát gọi là *phản lực liên kết*. Phản lực liên kết cùng phương, trái chiều với chiều chuyển vị bị cản trở. Các liên kết thường gặp gồm liên kết gối tựa (di động, cố định), gối đàn hồi, liên kết ngàm cứng, ngàm trượt, ngàm đàn hồi, ... (hình 1.6).

Phản lực liên kết được xác định nhờ các phương trình cân bằng tĩnh học:

Với bài toán phẳng ta có

$$a) \sum X = 0, \sum Y = 0, \sum M_O = 0 \text{ (x không song song với y, O là bất kỳ)}$$

$$b) \sum U = 0, \sum M_A = 0, \sum M_B = 0 \text{ (AB không vuông góc với trục u)}$$

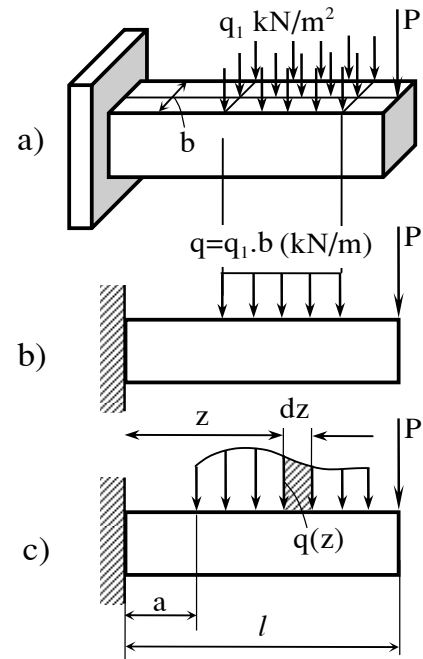
$$c) \sum M_A = 0, \sum M_B = 0, \sum M_C = 0 \text{ (A, B, C không thẳng hàng)}$$

Với bài toán không gian:

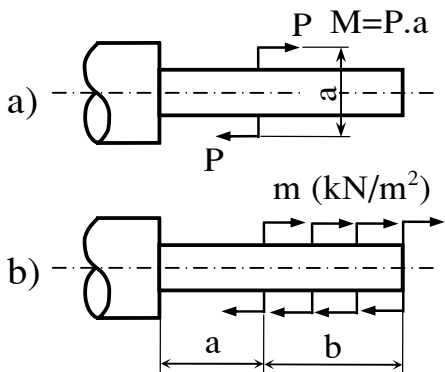
$$\sum X = 0, \sum Y = 0, \sum Z = 0, \sum m_x = 0, \sum m_y = 0, \sum m_z = 0$$

3. Sơ đồ hoá kết cấu

\Rightarrow Hình 1.7 là hai sơ đồ tính được rút ra từ dầm thực tương ứng, được sơ đồ hoá bởi một đường trục và các liên kết.

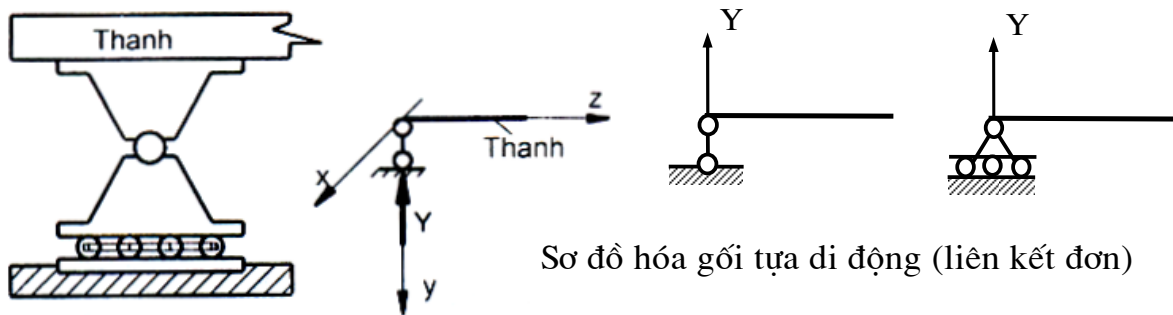


Hình 1.4

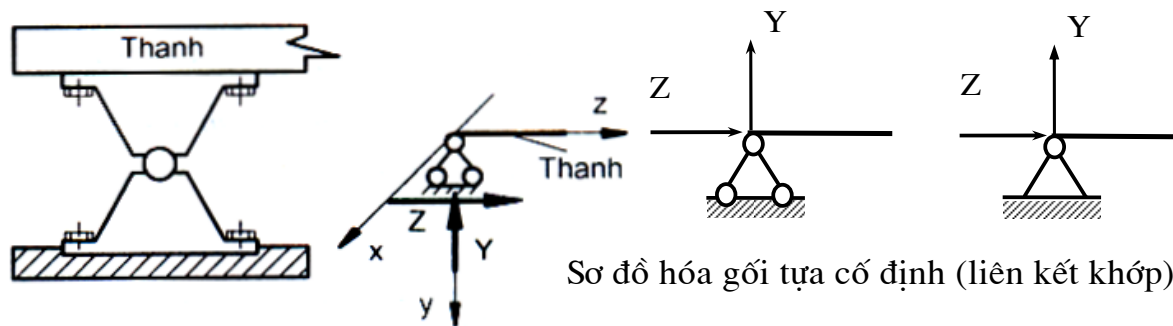


Hình 1.5

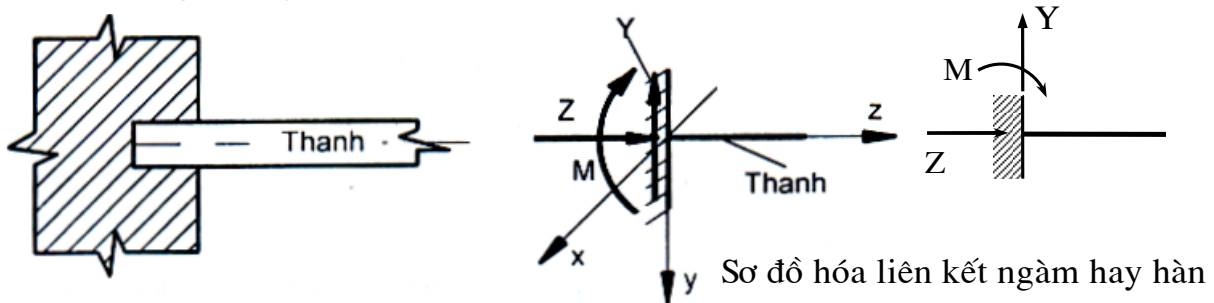
Liên kết gối tựa di động (liên kết đơn)



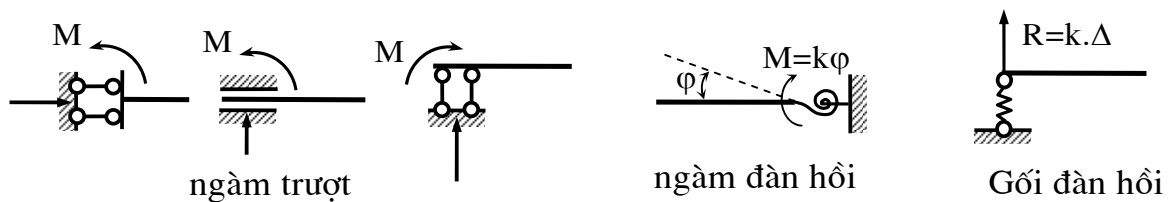
Liên kết gối tựa cố định (liên kết khớp)



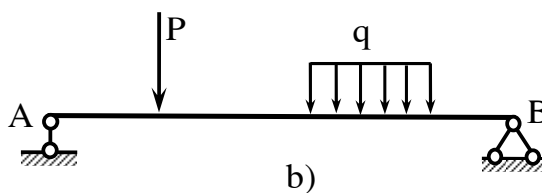
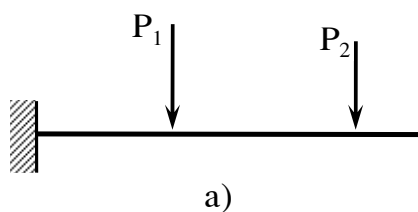
Liên kết ngàm hay liên kết hàn



Một số dạng liên kết khác



Hình 1.6



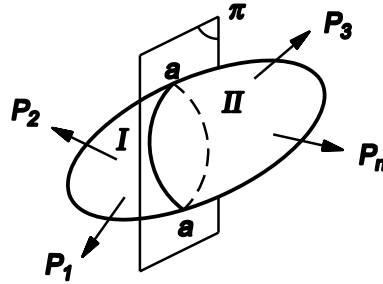
Hình 1.7

IV. NỘI LỰC VÀ ỨNG SUẤT

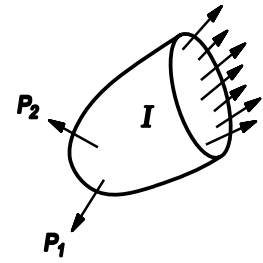
1. Nội lực

⇒ Phần lực tác dụng tương hỗ để chống lại tác dụng của ngoại lực gọi là *nội lực*.

⇒ *Phương pháp mặt cắt* xác định nội lực.

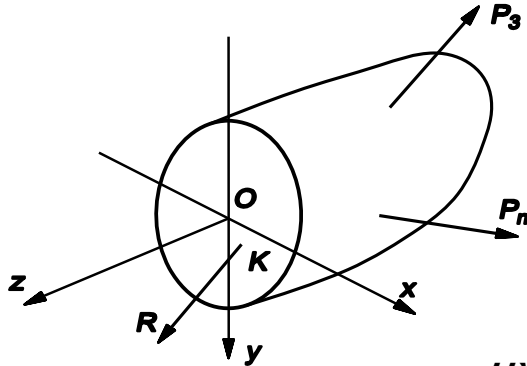


Hình 1.8

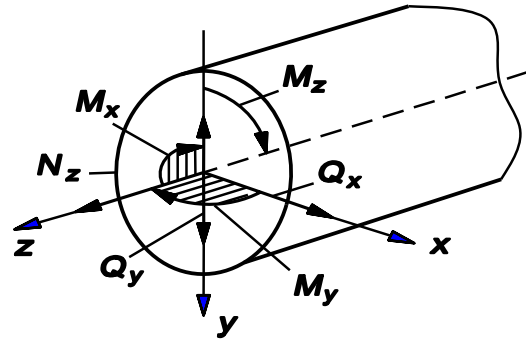


Hình 1.9

Các thành phần nội lực (hình 1.10) và quy ước về dấu (hình 1.11):



Hình 1.10



Hình 1.11

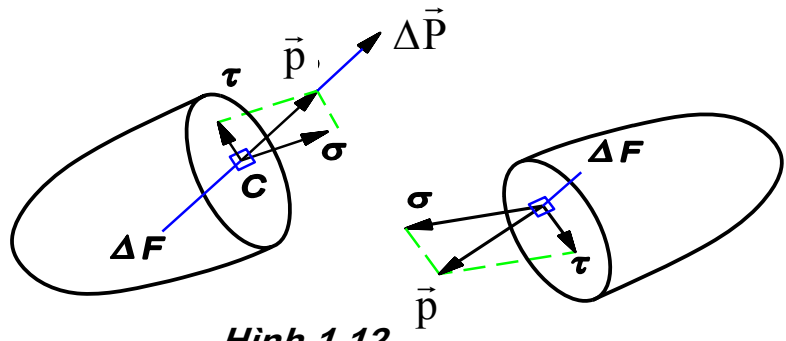
Lực dọc N_z ; lực cắt Q_x, Q_y ; mômen uốn M_x, M_y ; mômen xoắn M_z .

2. Ứng suất

⇒ Cường độ của nội lực tại một điểm nào đó trên mặt cắt được gọi là ứng suất toàn phần, ký hiệu \vec{p} (hình 1.12).

⇒ Ứng suất trung bình tại điểm M ký hiệu là:

$$\vec{p}_{tb} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta F}$$



Hình 1.12

(1.1)

$$\Rightarrow \text{Ứng suất toàn phần tại điểm M: } \vec{p} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta F} \text{ [lực/chiều dài}^2\text{]} \quad (1.2)$$

Trong hệ thống đơn vị quốc tế (SI) đơn vị ứng suất là 1 N/m^2 , đơn vị này cũng gọi là Pascal (Pa). Ngoài ra còn phổ biến một số đơn vị ứng suất khác và quan hệ giữa các đơn vị này như sau:

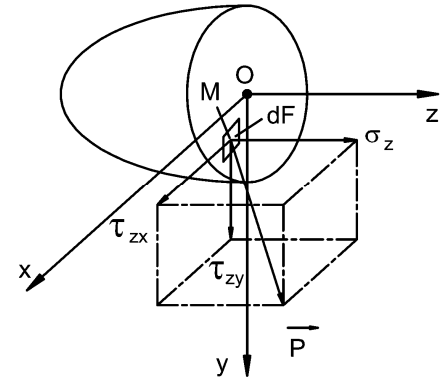
$$1 \text{ bar} = 0,1 \text{ MPa} = 1 \text{ daN/cm}^2 = 1 \text{ kG/cm}^2 = 10^5 \text{ N/m}^2.$$

$$1 \text{ MPa} = 1 \text{ MN/m}^2 = 10 \text{ daN/cm}^2 = 10 \text{ kG/cm}^2 = 10^6 \text{ N/m}^2.$$

\Rightarrow Ứng suất toàn phần \vec{p} phân làm hai thành phần (hình 1.12): ứng suất pháp, ký hiệu σ , ứng suất tiếp, ký hiệu τ :

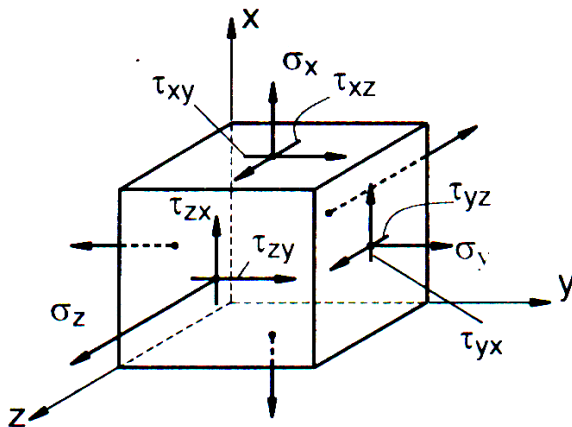
$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \quad (1.3)$$

\Rightarrow Có thể phân ứng suất \vec{p} thành ba phần theo 3 trục tọa độ là ứng suất pháp σ_z và ứng suất tiếp τ_{zx}, τ_{zy} (hình 1.13).

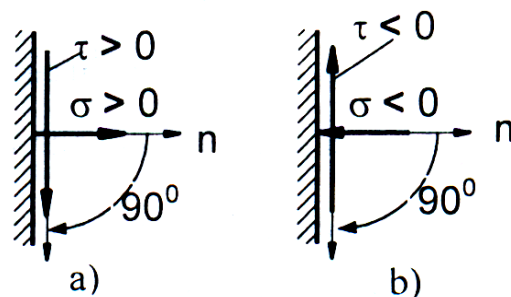


Hình 1.13

\Rightarrow Trong Sức bền vật liệu, người ta thường hay tách ra từ vật thể tại điểm đang xét một thể tích vật chất có kích thước vô cùng bé, gọi là *phần tử thể tích*. Hình dạng phần tử được chọn phù hợp với hệ tọa độ dùng để tính toán. Trong hệ tọa độ Đề các, phần tử là hình hộp chữ nhật có các mặt vuông góc với các trục tọa độ (hình 1.14). Các thành phần ứng suất được ký hiệu theo các phương của hệ trục tọa độ.



Hình 1.14



Hình 1.15

Quy ước dấu của ứng suất: ứng suất pháp và tiếp thể hiện trên phần tử thể tích (hình 1.14) đều là ứng suất dương. Đối với bài toán phẳng, ta có quy ước dấu của ứng suất như sau (hình 1.15):

\Rightarrow ứng suất pháp được coi là dương nếu nó đi ra khỏi mặt cắt.

⇒ ứng suất tiếp được coi là dương nếu khi quay pháp tuyến ngoài của mặt cắt cùng chiều kim đồng hồ mà chiều của nó trùng với chiều của ứng suất tiếp.

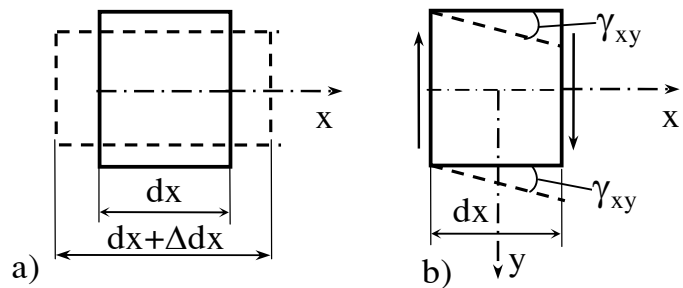
⇒ Quan hệ giữa ứng suất và các nội lực có hệ thức sau:

$$\begin{aligned} Q_x &= \int_F \tau_{zx} dF; Q_y = \int_F \tau_{zy} dF; N_z = \int_F \sigma_z dF; M_x = \int_F y \sigma_z dF; \\ M_y &= \int_F x \sigma_z dF; M_z = \int_F (x \tau_{zy} - y \tau_{zx}) dF \end{aligned} \quad (1.4)$$

IV. BIẾN DẠNG VÀ CHUYỂN VỊ

1. Biến dạng dài và biến dạng góc

⇒ Sự thay đổi hình dáng và kích thước của vật thể khi chịu tác dụng của ngoại lực được gọi chung là biến dạng. Biến dạng được phân thành hai loại: *biến dạng dài* (biến dạng thẳng) và *biến dạng góc* (biến dạng trượt).



Hình 1.16

⇒ Độ thay đổi chiều dài của các cạnh phân tố tách ra như trên hình 1.16 gọi là *biến dạng dài*. Ví dụ Δdx gọi là biến dạng dài tuyệt đối của cạnh dx của phân tố (hình 1.16a).

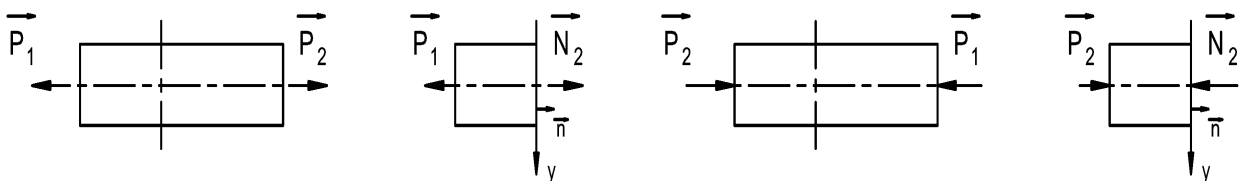
$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}$ là biến dạng dài tương đối hay biến dạng dài tỷ đối của cạnh dx .

⇒ Độ thay đổi về góc của các góc vuông của phân tố được gọi là biến dạng góc. Ví dụ γ_{xy} là biến dạng góc của góc vuông trong mặt phẳng xy (hình 1.16b).

⇒ *Biến dạng cơ bản được phân loại theo thành phần nội lực trên hệ trục quán tính chính trung tâm.*

a. Kéo (hoặc nén) đúng tâm (hình 1.17):

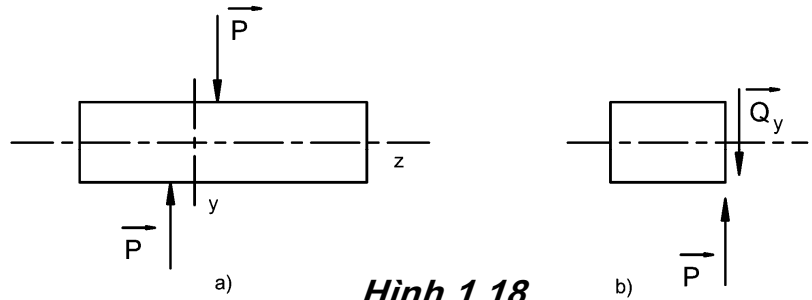
⇒ Hệ nội lực ở mặt cắt ngang tương đương với một lực dọc \vec{N}_z



Hình 1.17

b. Cắt (hay trượt) (hình 1.18)

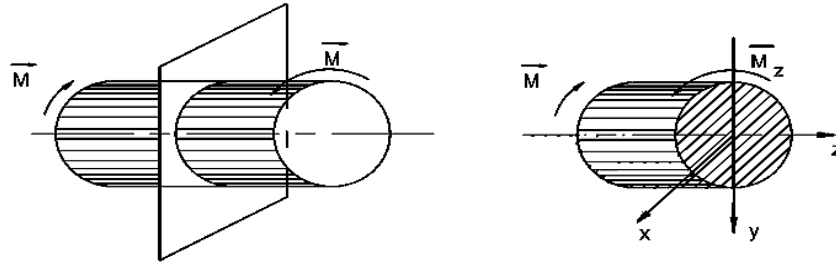
⇒ Hệ nội lực ở mặt cắt ngang tương đương với một lực ngang \bar{Q}_y (hoặc \bar{Q}_x).



Hình 1.18

c. Xoắn (hình 1.19).

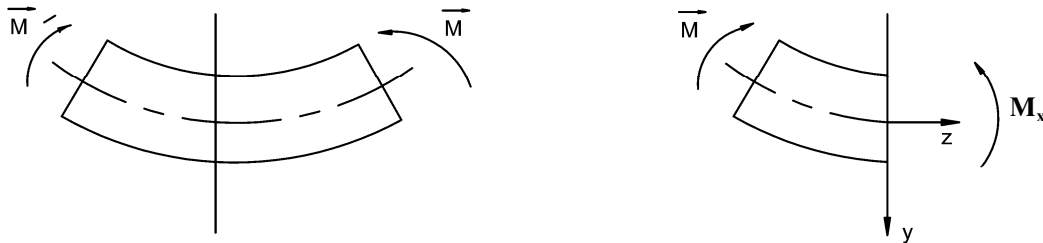
⇒ Hệ nội lực ở mặt cắt ngang tương đương với một ngẫu lực có mômen M_z nằm trong mặt cắt



Hình 1.19

d. Uốn (hình 1.20).

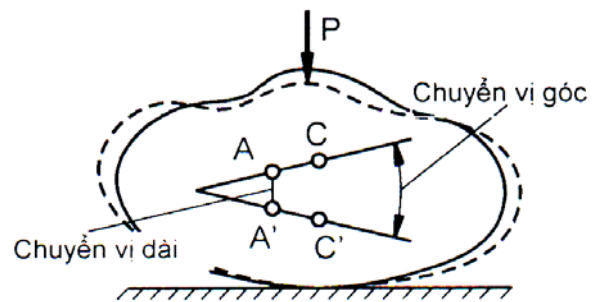
⇒ *Uốn thuần túy*: Hệ nội lực ở mặt cắt ngang tương đương với một ngẫu lực có mômen M_x (hoặc M_y). *Uốn ngang*: Q_y, M_x (Q_x, M_y)



Hình 1.20

2. Chuyển vị dài và chuyển vị góc

Độ dời từ vị trí cũ sang vị trí mới của các điểm trong vật thể bị biến dạng gọi là *chuyển vị dài*. Góc tạo bởi hai vị trí cũ và mới của một đoạn thẳng nào đó trong vật thể biến dạng gọi là *chuyển vị góc*.

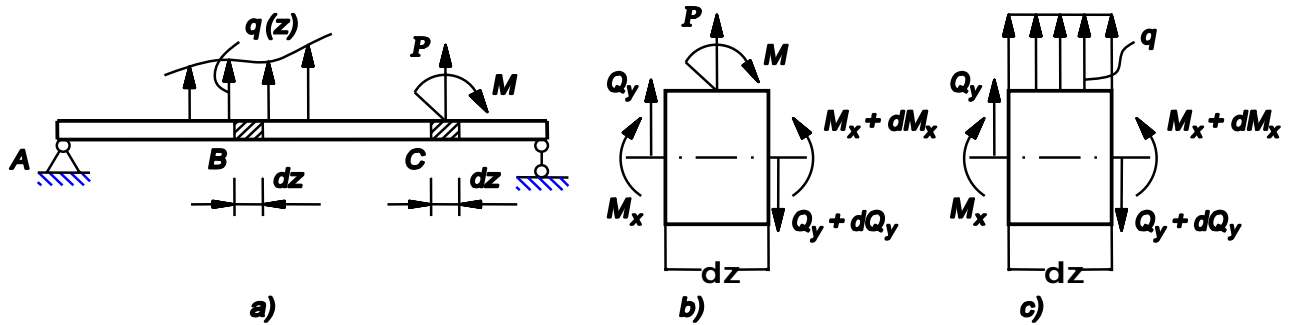


Hình 1.21

Chẳng hạn ta xét một vật thể bị biến dạng dưới tác dụng của các ngoại lực như hình 1.21. Gọi A' và C' là vị trí sau khi biến dạng của hai điểm A và C trong vật thể. Khi đó ta có AA' là chuyển vị dài của điểm A, còn góc tạo bởi AC và A'C' là chuyển vị góc.

VI. LIÊN HỆ VI PHÂN GIỮA NỘI LỰC VÀ NGOẠI LỰC

⇒ Ta nhận thấy giữa cường độ tải trọng phân bố, lực cắt và mômen uốn sẽ có mối quan hệ vi phân nhất định.



Hình 1.22

⇒ Thực vậy giả sử cho dầm chịu lực bất kỳ như trên hình 1.22a. Xét cân bằng của đoạn thanh hình 1.22b:

$$Q_y + P - (Q_y + dQ_y) = 0; \quad M_x + Q_y dz + M + P \frac{dz}{2} - (M_x + dM_x) = 0$$

⇒ Bỏ qua lượng vô cùng bé: $Q_y dz$ và $P \frac{dz}{2}$ so với M_x và M , ta rút ra điều cần nhận xét: $dQ_y = P; \quad dM_x = M$

⇒ Xét cân bằng của đoạn thanh hình 1.22c:

$$Q_y q \cdot dz - (Q_y + dQ_y) = 0; \quad M_x + Q_y \cdot dz + q dz \frac{dz}{2} - (M_x + dM_x) = 0$$

⇒ Nếu bỏ qua lượng vô cùng bé $q \frac{dz^2}{2}$, ta được:

$$\boxed{\frac{dQ_y}{dz} = q(z); \quad \frac{dM_x}{dz} = Q_y}; \quad \boxed{\frac{d^2 M_x(z)}{dz^2} = \frac{dQ_y(z)}{dz} = q(z)} \quad (1.6)$$

⇒ Vậy đạo hàm của lực cắt bằng cường độ của tải trọng phân bố theo chiều dài và đạo hàm của mômen uốn bằng lực cắt. Đó là sự liên hệ vi phân giữa cường độ tải trọng phân bố, lực cắt và mômen uốn.

VII. BIỂU ĐỒ NỘI LỰC

⇒ Biểu đồ nội lực là biểu thị sự biến thiên của các thành phần nội lực theo vị trí của các mặt cắt dọc theo trục thanh.

⇒ Một số quy ước về các biểu đồ nội lực đối với bài toán phẳng khi tải trọng nằm trong mặt phẳng qua trục thanh yz, trên mặt cắt ngang có ba

thành phần nội lực N_z , Q_y và M_x . Với thanh thẳng ta có: *tung độ dương của biểu đồ lực dọc N_z , ký hiệu (N_z) và lực cắt Q_y , ký hiệu (Q_y) được vẽ về phía trên trục hoành (đường chuẩn). Biểu đồ mômen uốn M_x , ký hiệu (M_x) vẽ về phía thớ bị căng ($M_x > 0$), do đó tung độ dương của M_x được vẽ xuống phía dưới đường chuẩn.*

1. Để vẽ biểu đồ nội lực cần thực hiện theo trình tự sau:

- ⇒ Xác định các thành phần phản lực liên kết cần thiết
- ⇒ Phân đoạn và dùng phương pháp mặt cắt xác định các thành phần nội lực trên từng đoạn thanh.
- ⇒ Dựa vào quy luật phân bố từng thành phần nội lực vẽ biểu đồ nội lực cho từng loại nội lực.
- ⇒ Kiểm tra lại biểu đồ nội lực

2. Để vẽ nhanh và kiểm tra biểu đồ nội lực cần:

Dựa trên các nhận xét về bước nhảy:

- ⇒ Tại mặt cắt có đặt lực tập trung, biểu đồ lực cắt có bước nhảy, trị số bước nhảy bằng trị số lực tập trung.
- ⇒ Tại mặt cắt có mômen tập trung, biểu đồ mômen uốn có bước nhảy, trị số bước nhảy bằng trị số mômen tập trung.

Dựa trên các liên hệ vi phân giữa ngoại lực và nội lực:

- ⇒ Trên đoạn thanh không có lực phân bố ($q = 0$), biểu đồ lực cắt (Q_y) là hằng số, mômen uốn (M_x) là đường bậc nhất.
- ⇒ Lực phân bố $q = \text{const} \Rightarrow Q_y$ bậc nhất, M_x là đường bậc hai.
- ⇒ Nếu trên đoạn thanh mà $q(z)$ là đa thức bậc $n \Rightarrow Q_y$ là một đường bậc $(n+1)$ và M_x là một đường $(n+2)$.
- ⇒ Trên đoạn thanh có $q > 0$ (hướng lên) thì Q_y đồng biến, trên đoạn thanh có $q < 0$ (hướng xuống) thì Q_y nghịch biến.
- ⇒ Trên đoạn thanh có $Q_y > 0$ thì M_x đồng biến, trên đoạn thanh có $Q_y < 0$ thì M_x nghịch biến. Tại mặt cắt $Q_y = 0$, M_x đạt cực trị:
 - + Cực đại khi $q < 0$ (có chiều hướng xuống $q \downarrow$)
 - + Cực tiểu khi $q > 0$ (có chiều hướng lên trên $q \uparrow$)

Dựa trên tính đối xứng và tác dụng của tải trọng:

- ⇒ Bề lõm của biểu đồ mômen uốn M_x luôn hứng lấy chiều tác dụng của lực phân bố.
- ⇒ Trường hợp hệ có kết cấu đối xứng chịu tải trọng đối xứng, biểu đồ M_x sẽ đối xứng, biểu đồ Q_y sẽ phản đối xứng qua trục đối xứng của hệ. Nếu kết cấu đối xứng chịu tải trọng phản đối xứng thì biểu đồ lực cắt đối xứng và biểu đồ mômen uốn phản đối xứng.

3. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1.1.: Vẽ biểu đồ lực dọc của một thanh chịu lực như hình 1.23a.

Giải

Để xác định lực dọc N_z trên một mặt cắt ngang nào đó trên thanh AB, ta áp dụng phương pháp mặt cắt.

1. Phân đoạn và xác định lực dọc trong các đoạn

Đoạn AC (hình 1.23b): Cắt bằng mặt cắt 1-1, giữ lại phần trái, rồi thêm vào mặt cắt một thành phần lực dọc N_{z1} . Từ phương trình cân bằng hình chiếu $\sum Z = 0$ của phần đang xét ta có: $N_{z1} - P_1 = 0 \Leftrightarrow N_{z1} = P_1 = 8 \text{ kN}$ (a)

$N_{z1} > 0$ chứng tỏ chiều lực dọc giả định hướng ra khỏi mặt cắt là đúng và gọi đó là lực kéo. Nếu lực dọc mang giá trị âm thì là lực nén.

Đoạn CD (hình 1.23c): Dùng mặt cắt 2-2, xét phần bên trái. Từ phương trình cân bằng hình chiếu $\sum Z = 0$ của phần đang xét ta có:

$$N_{z2} - P_1 + P_2 = 0 \Leftrightarrow N_{z2} = P_1 - P_2 = -2 \text{ kN} \quad (b)$$

$N_{z2} < 0$ chứng tỏ chiều lực dọc ngược với chiều giả định hướng ra khỏi mặt cắt và gọi đó là lực nén.

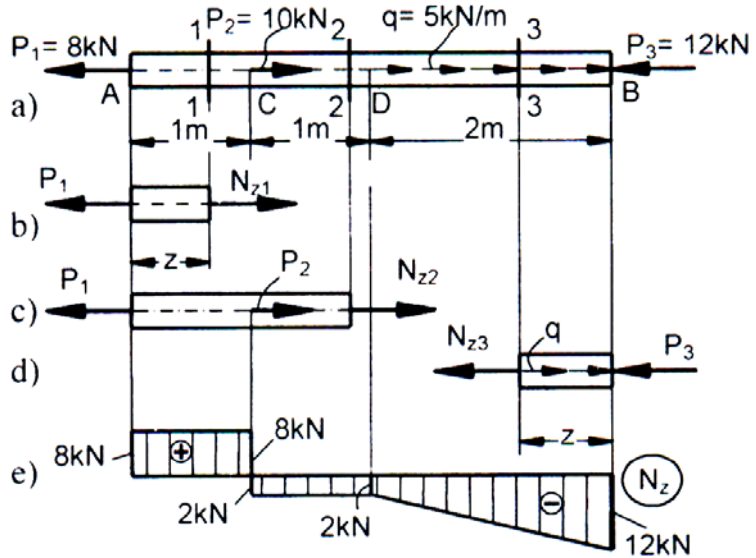
Đoạn DB như trên hình 1.23d ($0 \leq z \leq 2\text{m}$): Dùng mặt cắt 3-3, xét phần bên phải. Từ phương trình cân bằng hình chiếu $\sum Z = 0$ của phần đang xét ta có:

$$N_{z3} - q \cdot z + P_3 = 0 \Leftrightarrow N_{z3} = q \cdot z - P_3 = 5z - 12 \text{ (kN)} \quad (c)$$

Biểu thức (c) là hàm bậc nhất theo z , khi $z = 0$ thì $N_{z3} = -12 \text{ kN}$, khi $z = 2$ thì $N_{z3} = -2 \text{ kN}$.

2. Vẽ biểu đồ lực dọc (hình 1.23e)

3. Kiểm tra lại biểu đồ: Ví dụ tại mặt cắt A, C và B có lực tập trung biểu đồ lực dọc có bước nhảy, giá trị bước nhảy bằng lực tập trung.



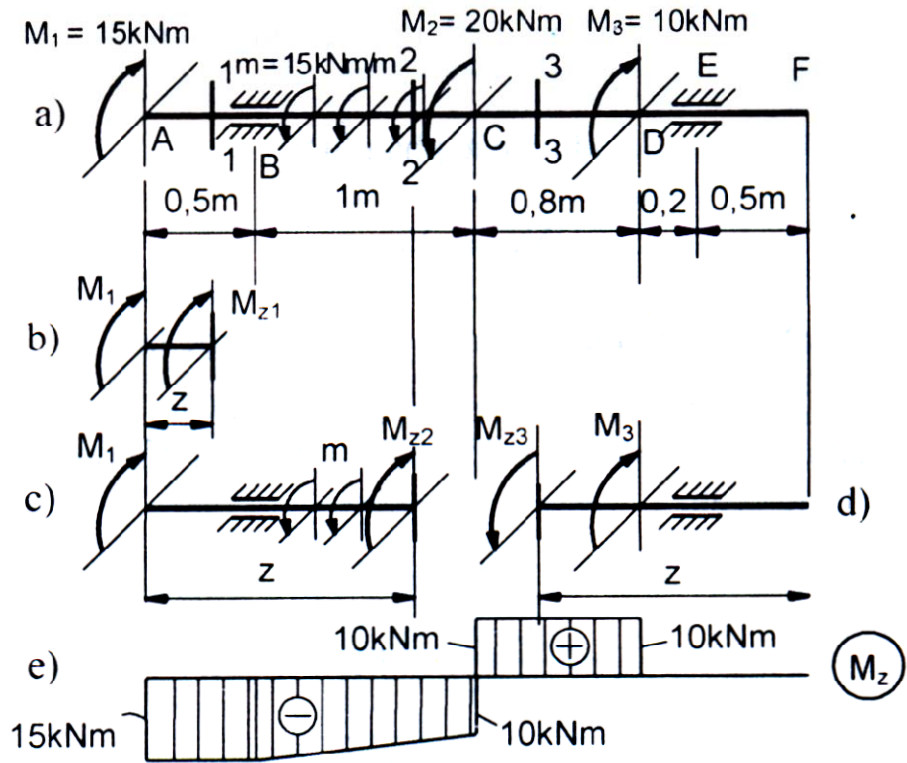
Hình 1.23

Ví dụ 1.2.: Vẽ biểu đồ mômen xoắn của thanh chịu lực như hình 1.24a.

Giải

1. Xác định phản lực liên kết cần thiết: Bỏ qua ma sát ở trong ổ đỡ thì mômen phải lực quay quanh trục z tại B và E sẽ bằng không.

2. Phân đoạn và xác định mômen xoắn: Chia thanh thành 4 đoạn AB, BC, CD và DE, sau đó lần lượt xác định mômen xoắn trên các đoạn bằng phương pháp mặt cắt.



Hình 1.24

Đoạn AB ($0 \leq z \leq 0,5\text{m}$) như trên hình 1.24b: Dùng mặt cắt 1-1, chọn A làm gốc, xét phần trái:

$$M_{z_1} + M_1 = 0 \Leftrightarrow M_{z_1} = -M_1 = -15\text{kNm}$$

Đoạn BC ($0,5 \leq z \leq 1,5\text{m}$) như trên hình 1.24c: Dùng mặt cắt 2-2, chọn A làm gốc, xét phần trái:

$$M_{z_2} + M_1 - m(z - 0,5) = 0 \Leftrightarrow M_{z_2} = 5z - 17,5$$

Đoạn CD (hình 1.24d): dùng mặt cắt 3-3, xét phần phải:

$$M_{z_3} - M_3 = 0 \Leftrightarrow M_{z_3} = M_3 = 10\text{kNm}$$

Đoạn DE: $M_{z_4} = 0$

3. Vẽ biểu đồ mômen xoắn (hình 1.24e).

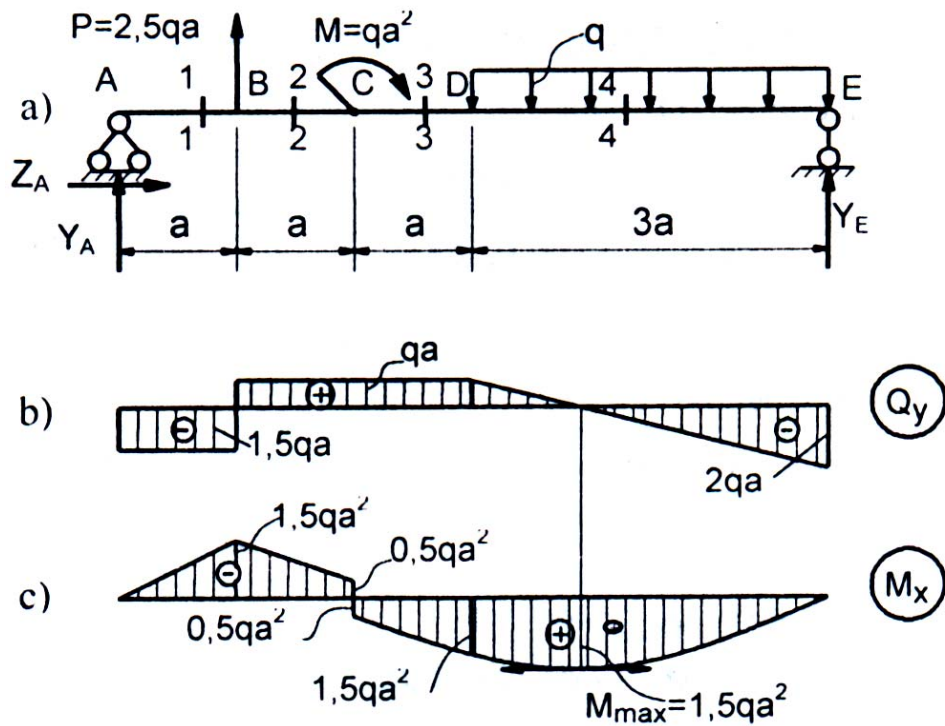
4. Kiểm tra lại biểu đồ: Ví dụ đoạn BC có mômen phân bố bằng hằng số thì biểu đồ mômen xoắn phải là bậc nhất. Tại các mặt cắt A, C và D có mômen tập trung thì biểu đồ mômen xoắn phải có bước nhảy, giá trị bước nhảy bằng giá trị mômen tập trung.

Ví dụ 1.3.: Vẽ biểu đồ nội lực của thanh chịu uốn (dầm) như hình 1.25.

Giải

1. Xác định các thành phần phản lực: Coi thanh tuyệt đối cứng và xét sự cân bằng của thanh dưới tác dụng của các tải trọng và phản lực:

$$\left. \begin{aligned} \sum Z &= Z_A = 0, \\ \sum Y &= -Y_A - 2,5qa + 3qa - Y_E = 0 \\ \sum m_A &= 2,5qa \cdot a - qa^2 - 3qa \cdot 4,5a + Y_E \cdot 6a = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} Z_A = 0, \\ Y_A = -1,5qa \\ Y_E = 2qa \end{cases}$$



Hình 1.25

2. Phân đoạn và xác định nội lực bằng phương pháp mặt cắt:

Ta chia dầm thành 4 đoạn AB, BC, CD và DE

a) Đoạn AB ($0 \leq z \leq a$) như hình 1.25d, xét cân bằng của phần trái:

$$\sum Y = 1,5qa + Q_y = 0 \Leftrightarrow Q_y = -1,5qa$$

$$\sum m_{O_1} = M_x + 1,5qa \cdot z = 0 \Leftrightarrow M_x = -1,5qa \cdot z$$

b) Đoạn BC ($a \leq z \leq 2a$) như hình 1.25e, xét cân bằng ta có:

$$\sum Y = 1,5qa - 2,5qa + Q_y = 0 \Leftrightarrow Q_y = qa$$

$$\sum m_{O_2} = M_x + 1,5qa \cdot z - 2,5qa \cdot (z - a) = 0 \Leftrightarrow M_x = -2,5qa^2 + qaz$$

c) Đoạn CD ($2a \leq z \leq 3a$) như hình 1.25f, xét cân bằng ta có:

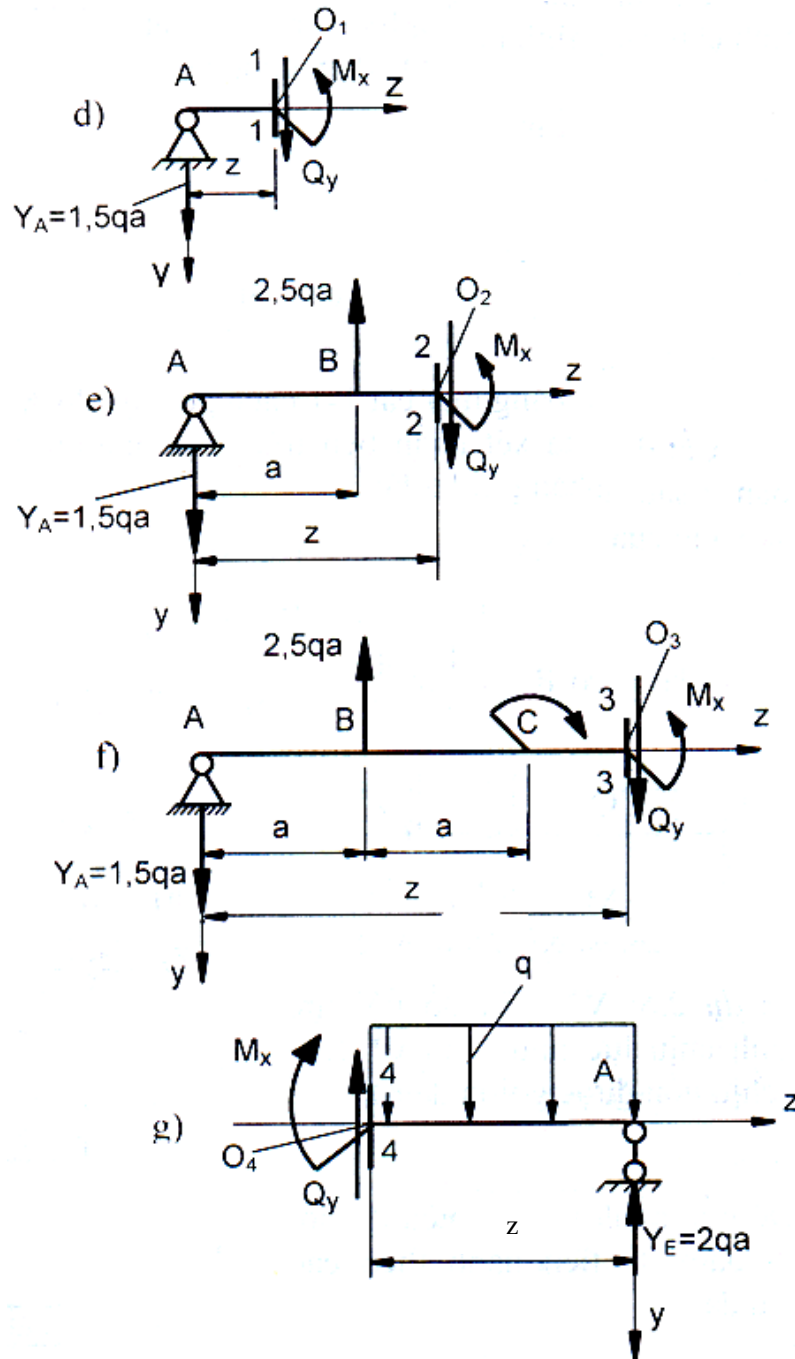
$$\sum Y = 1,5qa - 2,5qa + Q_y = 0 \Leftrightarrow Q_y = qa$$

$$\sum m_{O_3} = M_x + 1,5qa \cdot z - 2,5qa \cdot (z - a) - qa^2 = 0 \Leftrightarrow M_x = -1,5qa^2 + qaz$$

d) Đoạn DE ($0 \leq z \leq 3a$) như hình 1.25g xét cân bằng ta có:

$$\sum Y = -Q_y + zq - 2qa = 0 \Leftrightarrow Q_y = qz - 2qa$$

$$\sum m_{O_4} = -M_x - q(z)^2 / 2 + z \cdot 2qa = 0 \Leftrightarrow M_x = -qz^2 / 2 + 2qaz$$



Hình 1.25

3. Vẽ các biểu đồ nội lực (xem hình 1.25b, c).

Ví dụ 1.4.: Cho một dầm chịu lực như hình 1.28. Vẽ biểu đồ nội lực Q_y , M_x bằng phương pháp nhận xét.

Bài giải:

1) Xác định phản lực liên kết:

$$\sum m_A(\vec{F}) = Y_B \cdot 3a + M + P \cdot a - q \cdot a \cdot \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow Y_B = -\frac{q \cdot a}{2} < 0$$

Chiều Y_B ngược lại hình vẽ. Ta đổi chiều Y_B xuống dưới.

$$\sum F_y = Y_A - Y_B + P - q \cdot a = 0 \Rightarrow Y_A = Y_B = \frac{q \cdot a}{2} > 0.$$

Vậy chiều của Y_A giữ nguyên.

2) Phân đoạn, xác định nội lực trên các đoạn

3) Vẽ biểu đồ nội lực

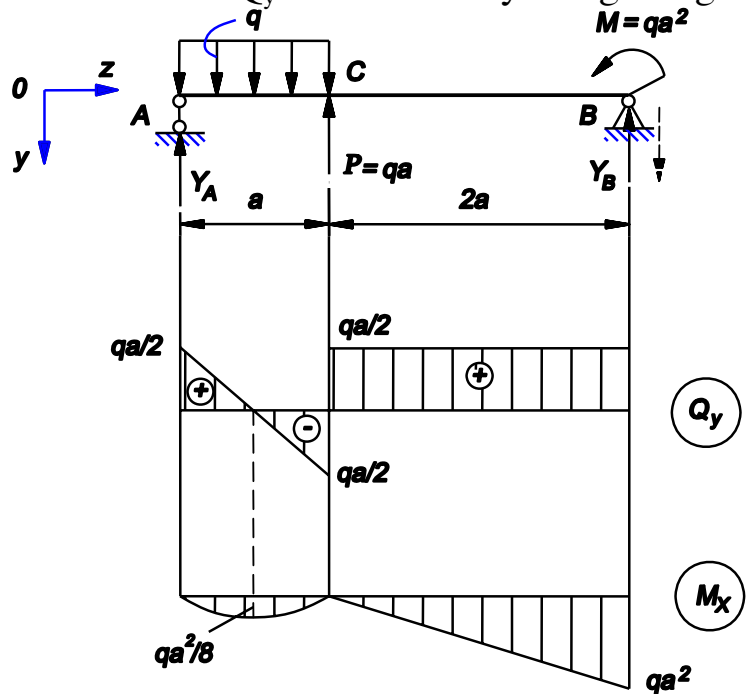
a) Biểu đồ lực cắt.

Trên đoạn AC có tải trọng phân bố đều $q = \text{const}$, vậy biểu đồ lực cắt là hàm bậc nhất. Tại A có lực tập trung $Y_A = \frac{q \cdot a}{2}$ là dương. Tại C có lực tập trung $P = q \cdot a$ hướng lên trên nên biểu đồ Q_y có bước nhảy đúng bằng P . Trên đoạn CB, biểu đồ lực cắt là hằng số và bằng phản lực liên kết tại B.

b) Biểu đồ mômen uốn.

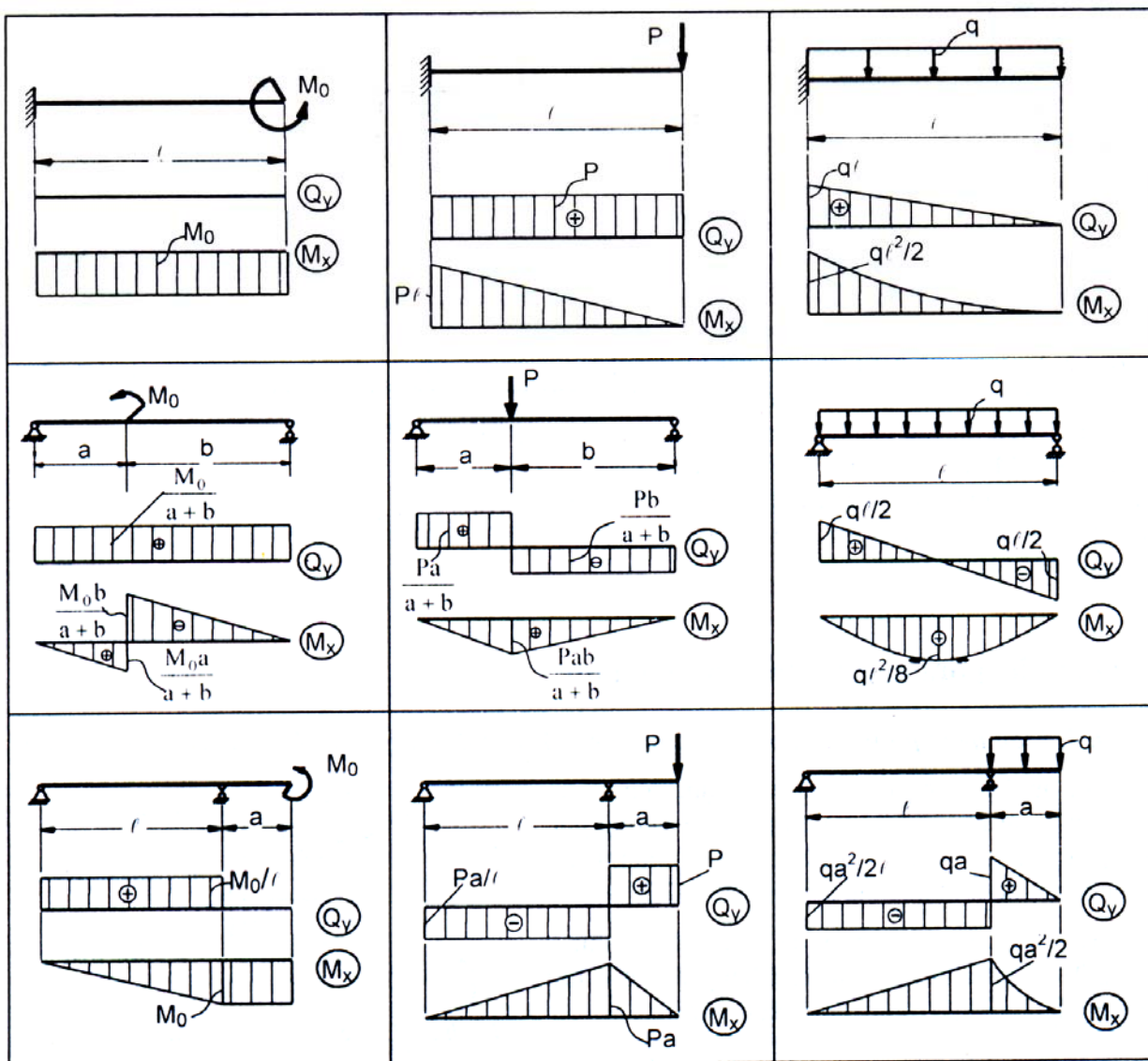
Trên đoạn AC biểu đồ mômen là hàm bậc 2, đường parabol có bề lõm hướng lấy chiều của tải trọng q . Trên đoạn CB, biểu đồ M_x là hàm bậc nhất. Tại B, mô men có giá trị chính bằng mô men tập trung M làm căng thớ dưới. Tại D, ta có $Q_y = 0$ nên M_x đạt giá trị cực trị.

Trên hình 1.28 biểu diễn biểu đồ Q_y và M_x của dầm.



Hình 1.28

Bảng 1. Biểu đồ nội lực của một số dầm đơn giản



Chương 2. TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT - BIẾN DẠNG

I. KHÁI NIỆM VỀ TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT

⇒ Trạng thái ứng suất tại một điểm của vật thể đàn hồi chịu lực là tập hợp tất cả các ứng suất tác dụng trên tất cả các mặt vô cùng bé đi qua điểm đó, đặc trưng bởi tenxơ đối xứng cấp 2 có 6 thành phần ứng suất độc lập (hình 2.1):

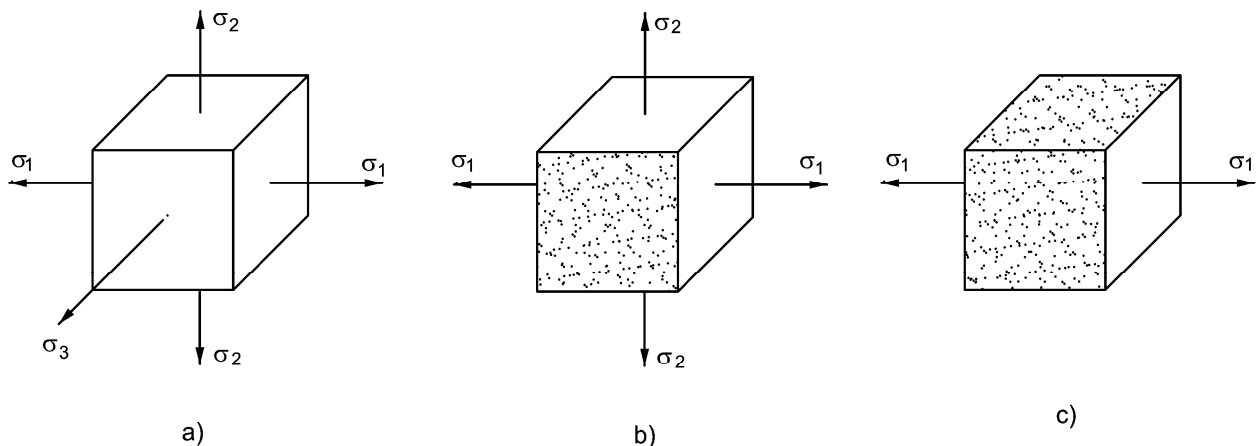
$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

như biểu thị trên các mặt của phân tố toạ độ $Cdx dy dz$.

⇒ Qua 1 điểm ta luôn tìm ba mặt vuông góc với nhau có ứng suất tiếp bằng 0, các mặt đó là *mặt chính*, pháp tuyến mặt chính gọi là *phương chính*, ứng suất pháp trên các mặt chính gọi là *ứng suất chính* σ_1, σ_2 và σ_3 :

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \quad (2.2)$$

⇒ Căn cứ vào các ứng suất chính ta phân loại trạng thái ứng suất như sau: *Trạng thái ứng suất khối* (hình 2.2a), *trạng thái ứng suất phẳng* (hình 2.2b), *trạng thái ứng suất đơn* (hình 2.2c).

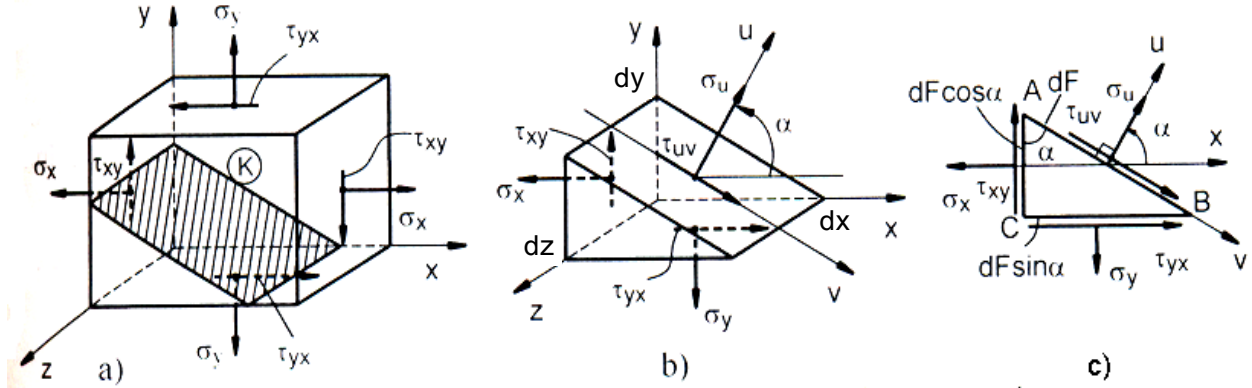


Hình 2.2

II. TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT PHẪNG

1. Ứng suất trên mặt nghiêng bất kì

⇒ Tách một phân tử tại điểm K khỏi vật thể đàn hồi chịu lực (hình 2.3a). Giả thiết mặt vuông góc với trục z là mặt chính ($\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$), các mặt còn lại có cả ứng suất pháp và ứng suất tiếp.



Hình 2.3

⇒ Xét sự cân bằng của phân tử hình lăng trụ đáy là tam giác, mặt bên nghiêng. Phương trình tổng mômen các lực với O:

$$\sum M_O = \tau_{xy} dy dz \frac{dx}{2} - \tau_{yx} dz dx \frac{dy}{2} = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2.3)$$

⇒ *Luật đối ứng của ứng suất tiếp*, phát biểu như sau: “Nếu trên mặt cắt nào đó có ứng suất tiếp thì trên mặt cắt vuông góc với nó cũng phải có ứng suất tiếp có cùng trị số nhưng đối chiều”.

⇒ Gọi diện tích mặt AB là dF , khi đó diện tích mặt AC là $dF \cos \alpha$ và diện tích mặt BC là $dF \sin \alpha$. Lập các phương trình hình chiếu sau của phân tử ABC lên các trục u và v ta có:

$$\begin{aligned} \sum U &= \sigma_u dF - (\sigma_x dF \cos \alpha) \cos \alpha + (\tau_{xy} dF \cos \alpha) \sin \alpha - \\ &\quad - (\sigma_y dF \sin \alpha) \sin \alpha + (\tau_{yx} dF \sin \alpha) \cos \alpha = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum V &= \tau_{uv} dF - (\sigma_x dF \cos \alpha) \sin \alpha - (\tau_{xy} dF \cos \alpha) \cos \alpha + \\ &\quad + (\sigma_y dF \sin \alpha) \cos \alpha + (\tau_{yx} dF \sin \alpha) \sin \alpha = 0 \end{aligned}$$

⇒ Sau khi rút gọn, sử dụng định luật đối ứng ứng suất tiếp ta được giá trị của σ_u và τ_{uv} :

$$\sigma_u = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (2.4)$$

$$\tau_{uv} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (2.5)$$

\Rightarrow Rõ ràng là khi $\alpha = 0$ (hoặc $\pi/2$) thì σ_u và τ_{uv} có giá trị bằng σ_x , τ_{xy} (hoặc σ_y , τ_{yx}).

2. Ứng suất chính và phương chính

\Rightarrow Mặt chính được xác định thông qua góc nghiêng α_0 , sao cho ứng suất tiếp trên đó bằng 0:

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha_0 + \tau_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} (= \operatorname{tg} \beta) \quad (2.6)$$

$$\Rightarrow \alpha_0 = \frac{\beta}{2} + k \cdot \frac{\pi}{2}$$

\Rightarrow Ta thấy α_0 có hai nghiệm là α_1 và α_2 (ứng với $k = 0$ và $k = 1$) lệch nhau $90^\circ \Rightarrow$ ta luôn có hai phương chính vuông góc với nhau. Thay α_1 và α_2 vào (2.4) ta sẽ được các ứng suất chính cần tìm, đó là những ứng suất pháp cực trị, vì

$$\frac{d\sigma_u}{d\alpha} = -2 \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha_0 - \tau_{xy} \cos 2\alpha_0 \right) = -2\tau_{uv} = 0$$

Thay α_0 vào (2.6) ta có : $\sigma_{\max}^{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.7)$

\Rightarrow Ứng suất tiếp cực trị xác định bằng $d\tau_{uv}/d\alpha = 0$:

$$\frac{d\tau_{uv}}{d\alpha} = 2 \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - 2\tau_{xy} \sin 2\alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

\Rightarrow So sánh với (2.7), ta được:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha_0} = -\cot g 2\alpha_0 \Rightarrow \alpha = \alpha_0 + k \cdot \frac{\pi}{4} \quad (2.8)$$

Kết luận: những mặt có ứng suất tiếp cực trị tạo với mặt chính một góc 45° . Thay (2.8) vào (2.5) với $\cos 2\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}}$, ta được:

$$\tau_{\max}^{\min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (2.9)$$

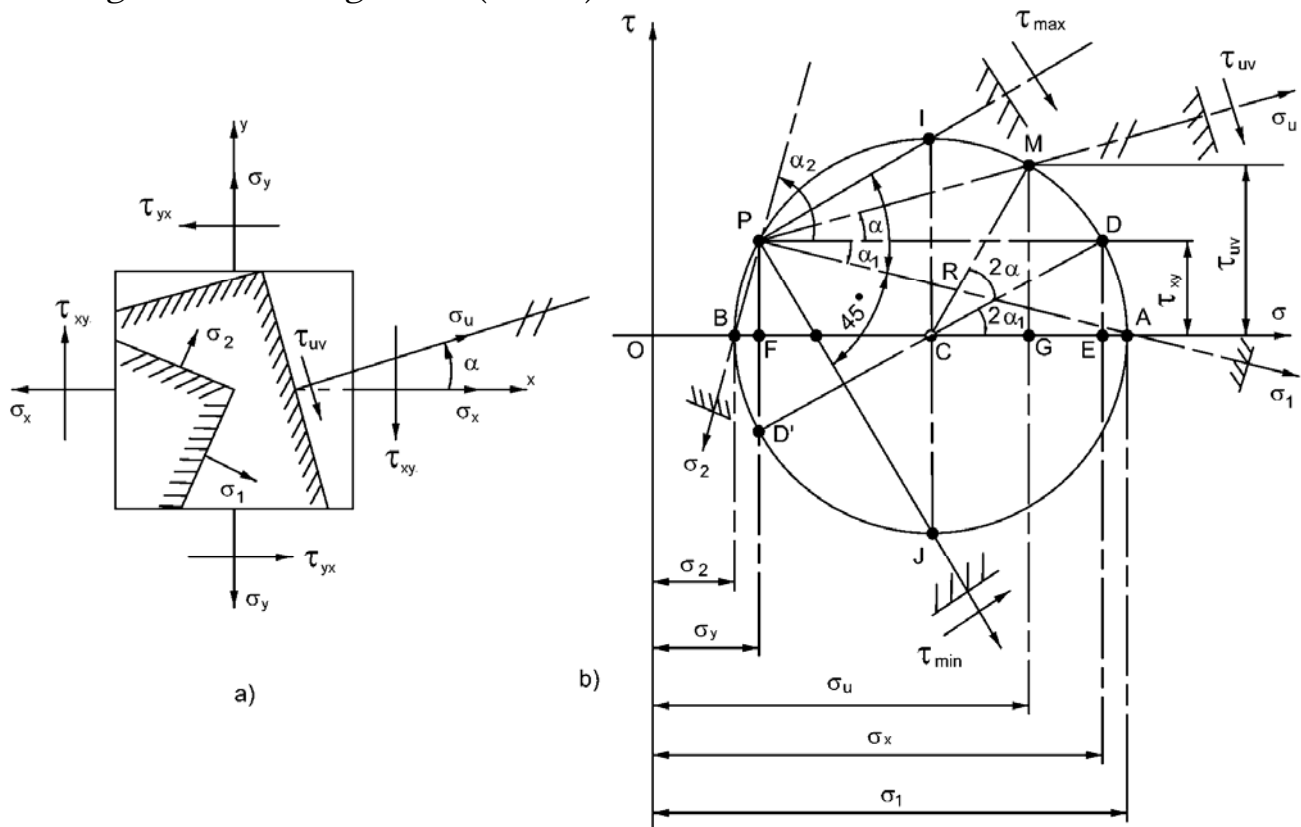
\Rightarrow Tính theo ứng suất chính ta có: $\tau_{\max}^{\min} = \pm \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad (2.10)$

III. VÒNG TRÒN MO (MOHR) ỨNG SUẤT

1. Cơ sở của phương pháp và cách vẽ vòng tròn MO ứng suất

⇒ Xét một phân tố với các ứng suất σ_x , σ_y , τ_{xy} đã cho như hình 2.4a. Lập hệ toạ độ $O\sigma\tau$ (hình 2.4b) theo tỷ lệ nhất định. Trên trục hoành σ đặt các đoạn $OE = \sigma_x$ và $OF = \sigma_y$. Từ E dựng đoạn $ED = \tau_{xy}$ vuông góc với OE. Vẽ vòng tròn có tâm C là trung điểm của đoạn

EF ($OC = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$) và bán kính CD ($CD = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$), gọi là *vòng tròn Mo ứng suất* (Mohr).



Hình 2.4

⇒ Để xác định các ứng suất σ_u và τ_{uv} trên mặt xiên có phương u làm với trục x một góc α cho trước (hình 2.4a) hãy lấy trên vòng tròn vừa vẽ một điểm P (thường gọi là *điểm cực*) có hoành độ σ_y và tung độ τ_{xy} (hình 2.4b), rồi từ P vẽ tia song song với phương u cho cắt vòng tròn tại điểm M. Toạ độ của M chính là các ứng suất σ_u và τ_{uv} cần tìm.

2. Xác định ứng suất chính và phương chính

⇒ Các giao điểm A và B của vòng tròn Mo với trục hoành Oσ là những điểm có hoành độ lớn nhất và nhỏ nhất, tung độ bằng 0:

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.11)$$

⇒ Phương của các tia PA và PB là các phương chính cần tìm của phân tố (hình 2.4a).

⇒ Theo hình 2.4b dễ thấy luôn luôn có:

$$\sigma_{\max} + \sigma_{\min} = 2OC = \sigma_y + \sigma_z = \text{hằng} \quad (2.12)$$

“*Tổng ứng suất pháp trên hai mặt vuông góc với nhau là hằng số*”.

⇒ Gọi α_1 và α_2 là góc của phương chính thứ nhất và phương chính thứ hai đối với trục x. Theo hình 2.4b, có:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{FP}{FA} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_{\max}}; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{FP}{FB} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_{\min}} \quad (2.13)$$

⇒ Trường hợp kéo (nén) đúng tâm ứng suất tiếp lớn nhất:

$$|\tau_{\max}| = |\tau_{\min}| = \frac{1}{2} \sigma_z \quad (2.14)$$

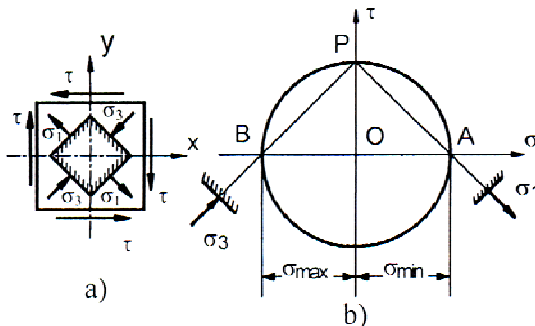
đó là hai mặt vuông góc với nhau, lần lượt làm với trục z một góc 45° và 135° .

3. Hai trường hợp đặc biệt

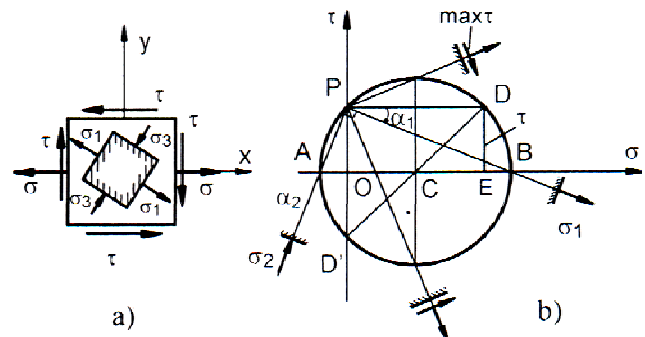
⇒ Trạng thái trượt thuần túy: phân tố mà trên các mặt chỉ có ứng suất tiếp (hình 2.5a). Lúc này vòng tròn Mo có tâm trùng với gốc toạ độ (hình 2.5b). Các ứng suất chính (ứng suất pháp cực trị) khác dấu nhau và có giá trị bằng giá trị của ứng suất tiếp:

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = |\tau|, \quad \sigma_2 = 0 \quad (2.15)$$

Các phương chính xiên góc 45° so với ứng suất tiếp (hình 2.5a).



Hình 2.5



Hình 2.6

⇒ Trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt là trạng thái có một thành

phần ứng suất pháp, ví dụ $\sigma_x = \sigma$, $\sigma_y = 0$ (hình 2.6a). Vòng Mo của TTUS này vẽ trên hình 2.6b. Trị số ứng suất chính (ứng suất pháp cực trị) là

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (2.16)$$

IV. LIÊN HỆ GIỮA ỨNG SUẤT - BIẾN DẠNG

1. Biến dạng dài (định luật Húc tổng quát)

⇒ Xét phân tố chính như hình 2.7, hãy tìm biến dạng dài tương đối ε_1 theo phương I của phân tố.

Biến dạng do σ_1 sinh ra: $\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_1}{E}$

Biến dạng do σ_2 sinh ra: $\varepsilon_{12} = -\mu \frac{\sigma_2}{E}$

Biến dạng do σ_3 sinh ra: $\varepsilon_{13} = -\mu \frac{\sigma_3}{E}$

⇒ Biến dạng dài (tương đối) theo phương I do các ba ứng suất σ_1 , σ_2 và σ_3 sinh ra: $\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13}$.

⇒ Làm tương tự ta được biến dạng (tương đối) theo phương II và phương III của phân tố:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] & \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] & \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] & \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \quad \text{hoặc} \quad (2.16)$$

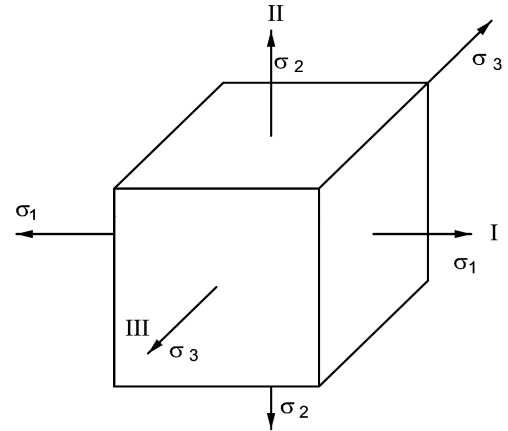
E: môđun đàn hồi của vật liệu, $[lực/(chiều dài)^2]$.

μ : hệ số Poát-xông của vật liệu, có giá trị $0 \div 0,5$.

⇒ Các hệ thức bậc nhất (2.16) trên đây giữa biến dạng dài và ứng suất pháp là nội dung của *định luật Húc tổng quát* đối với vật rắn đàn hồi tuyến tính.

2. Biến dạng góc (Định luật Húc về trượt)

⇒ Xét biến dạng của phân tố. Dưới tác dụng của ứng suất tiếp phân tố bị biến đổi hình dáng và trở thành hình bình hành (hình 2.8). Theo định luật Húc, giữa ứng suất tiếp τ và góc trượt γ có



Hình 2.7

liên hệ sau: $\tau_{ij} = G\gamma_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$) (2.18)

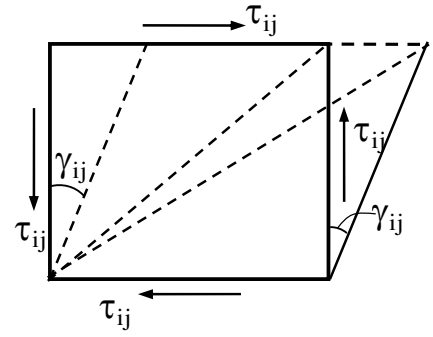
trong đó G là hệ số tỷ lệ gọi là môđun đàn hồi khi trượt [lực/chiều dài²], đó là hằng số vật liệu, được xác định từ thí nghiệm. Môđun G liên hệ với E và μ như sau:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

Xét phân tố với hệ trục tọa độ x, y , và z . Quan hệ ứng suất và biến dạng góc là:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \quad (2.19)$$

\Rightarrow Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng (2.16), (2.17) hoặc (2.18) biểu diễn bằng định luật Húc tổng quát.



Hình 2.8

3. Biến dạng thể tích tỷ đối (định luật Húc khối)

\Rightarrow Gọi dx, dy và dz là các cạnh của phân tố và V_0 là thể tích ban đầu của phân tố, ta có: $V_0 = dxdydz$

\Rightarrow Sau khi biến dạng, chiều dài các cạnh thay đổi sẽ là $(dx + \Delta dx)$, $(dy + \Delta dy)$ và $(dz + \Delta dz)$. Thể tích sau khi biến dạng:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_0 + \Delta V = (dx + \Delta dx).(dy + \Delta dy).(dz + \Delta dz) = \\ &= dxdydz \left(1 + \frac{\Delta dx}{dx}\right) \left(1 + \frac{\Delta dy}{dy}\right) \left(1 + \frac{\Delta dz}{dz}\right) = dxdydz (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) \end{aligned}$$

\Rightarrow Vì biến dạng là bé nên có thể bỏ qua các đại lượng vô cùng bé bậc 2 trở lên. Cuối cùng ta được: $V_1 = V_0(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$

\Rightarrow Gọi θ là biến dạng thể tích tương đối của phân tố, ta có:

$$\theta = \frac{V_1 - V_0}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1-2\mu}{E} \Sigma$$

\Rightarrow Tổng ứng suất pháp là: $\Sigma = \frac{E}{1-2\mu} \theta$ (2.20)

\Rightarrow Công thức trên biểu diễn liên hệ bậc nhất giữa biến dạng thể tích tương đối và tổng các ứng suất pháp, gọi là *định luật Húc khối*.

V. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 2.1. Ứng suất toàn phần trên mặt cắt m-n đi qua một điểm của một vật thể trong trạng thái ứng suất phẳng $p = 3000 \text{ N/cm}^2$ có phương tạo thành một góc 60° với mặt cắt. Trên mặt vuông góc với mặt cắt này chỉ có ứng suất tiếp (hình 2.9).

Tính ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên mặt cắt tạo thành góc 45° với mặt cắt m-n. Tính ứng suất pháp lớn nhất tại điểm đó.

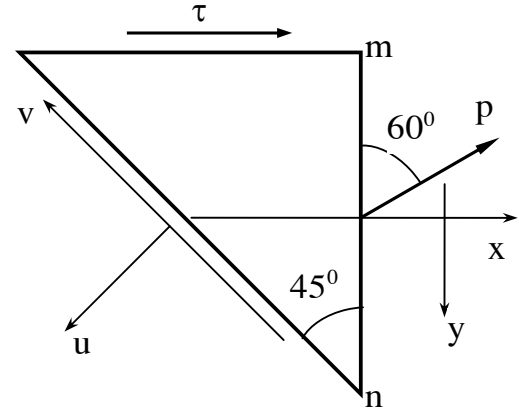
Giải

Ta thiết lập hệ trục xy trên mặt cắt m-n và hệ trục uv trên mặt cắt nghiêng như hình 2.9. Khi đó các thành phần ứng suất trên các mặt của phần tử ở trạng thái ứng suất phẳng:

$$\sigma_x = p \sin 60^\circ = 3.0,86 = 2,6 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_{xy} = -p \cos 60^\circ = -5.0,5 = -1,5 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_y = 0$$



Hình 2.9

Áp dụng công thức tính ứng suất trên mặt cắt nghiêng với $\alpha = -135^\circ$, ta có:

$$\sigma_u = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \approx 2,8 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_{uv} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \approx 1,3 \text{ kN/cm}^2$$

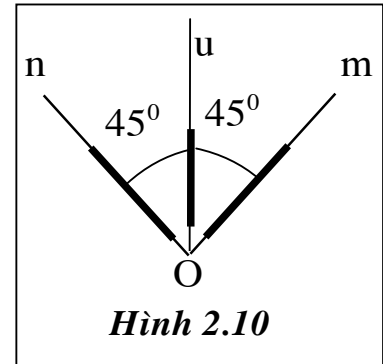
Ứng suất pháp lớn nhất tại điểm đó là:

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \approx 3,28 \text{ kN/cm}^2$$

Ví dụ 2.2. Tại một điểm trên mặt một vật thể chịu lực người ta đo được biến dạng tỷ đối theo các phương om, on, ou như sau:

$$\varepsilon_m = 2,81.10^{-4} ; \varepsilon_n = -2,81.10^{-4} ; \varepsilon_u = 1,625.10^{-4}$$

Xác định phương chính và ứng suất chính tại điểm ấy. Cho biết $\mu = 0,3$; $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$.



Hình 2.10

Giải

Ứng suất pháp phương m, n:

$$\varepsilon_m = \frac{1}{E}(\sigma_m - \mu\sigma_n) = \frac{1}{2.10^4}(\sigma_m - 0,3\sigma_n) = 2,81.10^{-4}$$

$$\varepsilon_n = \frac{1}{E}(\sigma_n - \mu\sigma_m) = \frac{1}{2.10^4}(\sigma_n - 0,3\sigma_m) = -2,81.10^{-4}$$

$$\Rightarrow \sigma_m = 4,32 \text{ kN/cm}^2; \sigma_n = -4,32 \text{ kN/cm}^2$$

Biến dạng theo phương u:

$$\varepsilon_u = \frac{1}{E}[\sigma_u - \mu(\sigma_m + \sigma_n - \sigma_u)] = \frac{1}{2.10^4}[\sigma_u - 0,3(4,32 - 4,32 - \sigma_u)]$$

Theo đầu bài ta có $\varepsilon_u = 1,625.10^{-4}$

$$\Rightarrow \sigma_u = 2,5 \text{ kN/cm}^2$$

Ứng suất tiếp τ_{mn} tìm từ công thức:

$$\sigma_u = \frac{\sigma_m + \sigma_n}{2} + \frac{\sigma_m - \sigma_n}{2} \cos 2\alpha - \tau_{mn} \sin 2\alpha$$

$$\Rightarrow 2,5 = \frac{4,32 - 4,32}{2} + \frac{4,32 + 4,32}{2} \cos 2.45^\circ - \tau_{mn} \sin 2.45^\circ$$

$$\Rightarrow \tau_{mn} = -2,5 \text{ kN/cm}^2$$

Giá trị ứng suất chính tại điểm cho trước:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}^{\min} &= \frac{\sigma_m + \sigma_n}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_m - \sigma_n)^2 + 4\tau_{mn}^2} = \\ &= \frac{4,32 - 4,32}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(4,32 - 4,32)^2 + 4.2,5^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{\max} = 5 \text{ kN/cm}^2 \\ \sigma_{\min} = -5 \text{ kN/cm}^2 \end{cases}$$

Phương chính:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_{mn}}{\sigma_m - \sigma_n} = \frac{2.2,5}{4,32 + 4,32} \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 15^\circ \\ \alpha_2 = 105^\circ \end{cases}$$

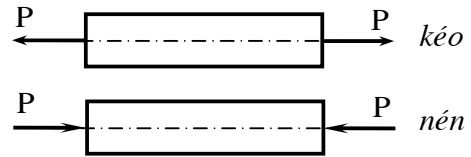
Chương 3. KÉO (NÉN) ĐÚNG TÂM

I. ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC GIẢ THUYẾT

1. Định nghĩa

⇒ Thanh bị kéo (nén) đúng tâm (hình 3.1) là thanh mà trên mọi mặt cắt ngang chỉ có một thành phần nội lực là lực dọc \vec{N}_z nằm trên trục thanh.

Ví dụ: Hình 3.1 là các thanh chịu kéo và nén đúng tâm khi chịu lực P dọc trục thanh.



Hình 3.1

⇒ Để biết sự biến thiên của lực dọc

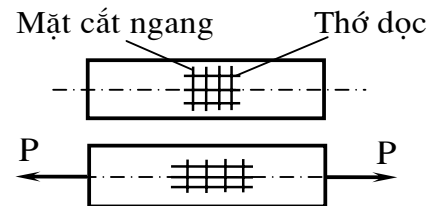
\vec{N}_z theo trục thanh, người ta lập một đồ thị biểu diễn, gọi là *biểu đồ lực dọc*.

⇒ Trong thực tế ta thường gặp các chi tiết máy, các cấu kiện trong công trình như cột, trụ máy, bu lông, cần pittông trong xi lanh, ... là những dạng thanh chịu kéo (nén) đúng tâm.

2. Các giả thuyết tính toán

Để đưa ra các giả thuyết đơn giản hóa quá trình tính toán, người ta làm thí nghiệm của thanh chịu kéo đúng tâm (hình 3.2).

Quan sát thí nghiệm người ta đưa ra hai giả thuyết sau:



Hình 3.2

⇒ *Giả thuyết MCN phẳng* (giả thuyết Béc-nu-li) MCN của thanh trước và sau khi biến dạng vẫn luôn thẳng và vuông góc với trục thanh.

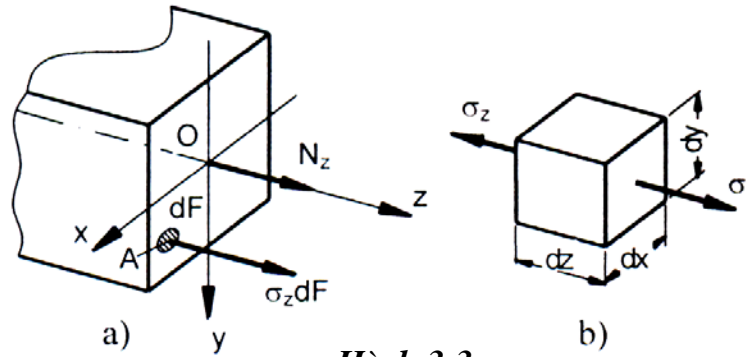
⇒ *Giả thuyết về các thớ dọc*: Trong quá trình biến dạng các thớ dọc luôn thẳng, song song với trục của thanh và không tác dụng tương hỗ lên nhau.

II. ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG

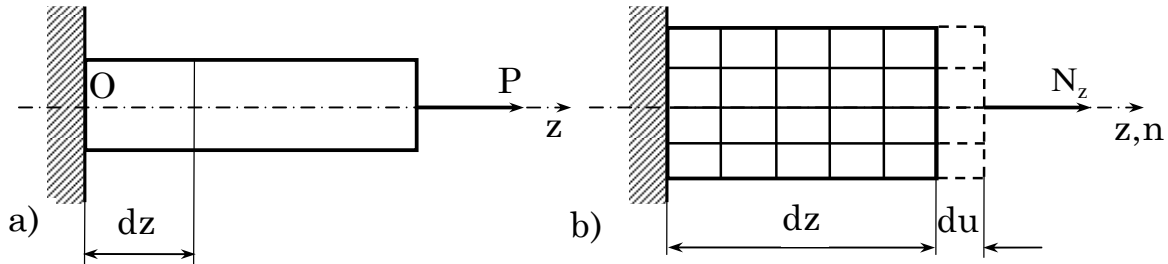
2. Ứng suất

⇒ Trên MCN của thanh ta thiết lập hệ trục tọa độ Oxyz như hình 3.3a. Tách một phân tố hình hộp vô cùng bé có các mặt song song với mặt phẳng tọa độ (hình 3.3b).

⇒ Dựa trên hai giả thuyết trên ta rút ra kết luận là sau khi biến dạng, phân tố chỉ có biến dạng dài, không có biến dạng góc. Do đó phân tố không có ứng suất tiếp, chỉ có ứng suất pháp. Mặt khác dựa vào giả thuyết thứ dọc, ta thấy các thớ dọc không ép lên nhau và cũng không đẩy nhau, nghĩa là $\sigma_x = \sigma_y = 0$, vậy phân tố chỉ còn thành phần ứng suất pháp σ_z (hình 3.3a).



Hình 3.3



Hình 3.4

⇒ Biến dạng dài tỷ đối theo phương trục z (hình 3.4):

$$\epsilon_z = \frac{du}{dz} \quad (3.1)$$

⇒ Định luật Húc do nhà khoa học Anh, Robert Hooke tìm ra năm 1660:

$$\sigma_z = E\epsilon_z \quad (3.2)$$

trong đó, hệ số tỉ lệ E được gọi là *môđun đàn hồi Young*.

⇒ Mặt khác, ta có:

$$N_z = \int_F \sigma_z dF = \sigma_z \int_F dF = \sigma_z F \Rightarrow \sigma_z = \frac{N_z}{F} \quad (3.3)$$

$$\Rightarrow \text{Trong tính toán thường viết: } \sigma_z = \pm \frac{N_z}{F} \quad (3.4)$$

2. Biến dạng dọc và biến dạng ngang

$$\Rightarrow \text{Từ các công thức (3.2) và (3.3) suy ra: } \epsilon_z = \frac{N_z}{EF} \quad (3.5)$$

$$\Rightarrow \text{Biến dạng dọc tuyệt đối } \Delta l: \Delta l = \int_l \epsilon_z dz = \int_l \frac{N_z}{EF} dz \quad (3.6)$$

⇒ Trường hợp đặc biệt khi $\frac{N_z}{EF} = \text{const}$:

$$\Delta l = \frac{N_z l}{EF}; \quad \Delta l = \sum_{i=1}^m \Delta l_i = \sum_{i=1}^n \frac{N_{zi} l_i}{E_i F_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.7)$$

⇒ *Biến dạng ngang* (biến dạng tỷ đối) theo phương ngang x hoặc y được kí hiệu là ε_x hoặc ε_y được xác định từ thí nghiệm:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\mu \varepsilon_z \quad (2-8)$$

trong đó μ là hằng số tỷ lệ, được gọi là *hệ số Poatxông* (do nhà bác học Pháp Simon Denie Poisson, 1781-1840). Với mọi loại vật liệu giá trị của μ nằm trong khoảng $0 \leq \mu \leq 0,5$. Với thép $\mu = 0,3$.

Ví dụ 3.1: Vẽ biểu đồ lực dọc của một thanh chịu lực như (hình 3.5a)

Giải:

1. Xác định phản lực tại C: $P_1 - P_2 + Z_C = 0$

⇒ $Z_C = -P_1 + P_2 = 20 \text{ kN}$, có chiều như hình vẽ.

2. Vẽ biểu đồ:

+ Xét đoạn AB:

(hình 3.5b) ($0 < z < 2a$)

Xét cân bằng:

$$\sum Z = N_{z_1} - P_1 = 0$$

$$\Rightarrow N_{z_1} = P_1 = 40 \text{ kN} > 0$$

+ Xét đoạn BC:

(hình 3.5c), ($2a \leq z_2 \leq 3a$)

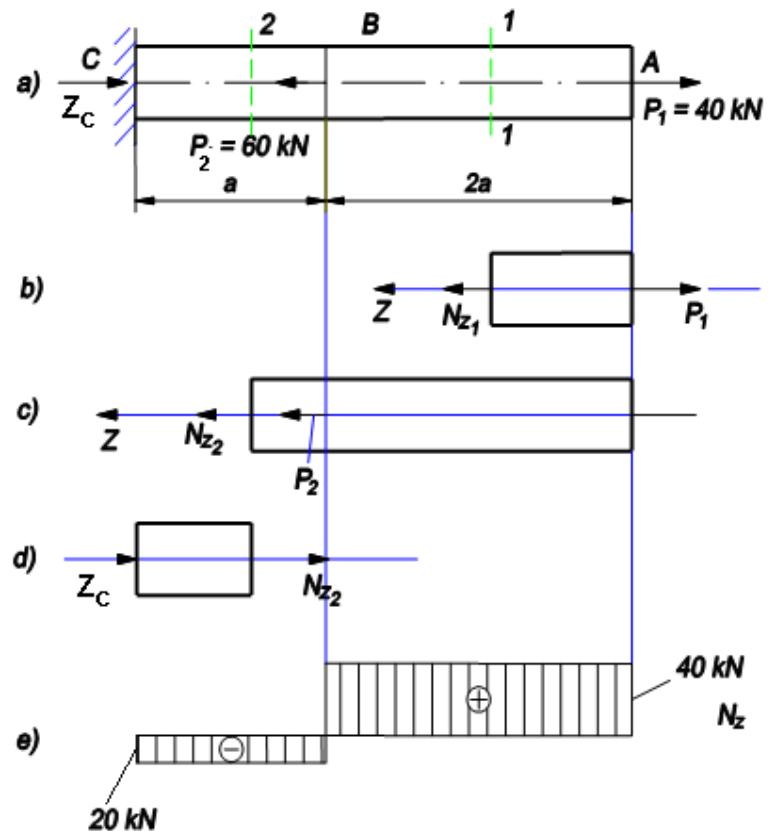
Xét cân bằng của phần phải, ta được:

$$\sum Z = N_{z_2} + P_2 - P_1 = 0$$

Suy ra: $N_{z_2} = P_1 - P_2 = 40 - 60 = -20 \text{ kN} < 0$ - lực nén.

Tương tự ta có thể xét các mặt cắt từ phần trái, chọn gốc tọa độ tại C (hình 3.5d). Kết quả thu được cũng giống như trên. Biểu đồ nội lực như trên hình 3.5e.

Ví dụ 3.2. Một thanh thép dài 4m (hình 3.6a) có tiết diện



Hình 3.5

vuông mỗi cạnh $a = 20\text{mm}$ chịu hai lực $P_1 = 40\text{kN}$ ở mút A và $P_2 = 60\text{kN}$ ở điểm giữa B. Cho biết $E = 2 \cdot 10^5 \text{N/mm}^2$, $\mu = 0,25$, $l_1 = l_2 = l = 2\text{m}$. Hãy tính chuyển vị của mút thanh và biến dạng tuyệt đối của kích thước ngang tại mặt cắt nguy hiểm.

Giải:

1. Lập biểu đồ lực dọc
2. Chuyển vị của mút thanh:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{N_{z_1} l}{EF} + \frac{N_{z_2} l}{EF} =$$

$$= \frac{1}{EF} (N_{z_1} + N_{z_2}) = 4,5\text{mm}$$

Các mặt cắt nguy hiểm thuộc đoạn BC: ứng suất pháp bằng:

$$\sigma_z = \frac{N_{z_2}}{F} = \frac{100 \cdot 10^3}{400} = 250 \text{N/mm}^2$$

Biến dạng dọc (tương đối) của đoạn này bằng:

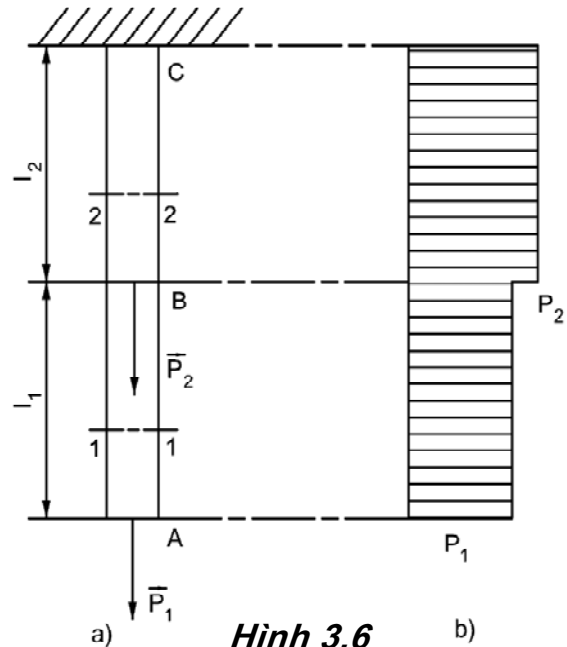
$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{250}{2 \cdot 10^5} = 0,00125 = 0,125\%$$

Biến dạng ngang: $\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\mu \varepsilon_z = -0,25 \cdot 0,00125 = -0,03125\%$

Biến dạng tuyệt đối của mặt cắt ngang (lượng co):

$$\Delta a = \varepsilon_x a = -0,0003125 \cdot 20 = -0,00625\text{mm}$$

Biến dạng ngang rất nhỏ so với biến dạng dọc.

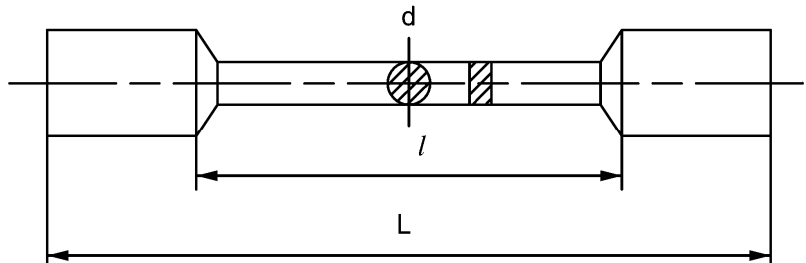


Hình 3.6

III. TÍNH CHẤT CƠ HỌC CỦA VẬT LIỆU

⇒ Tính chất cơ học của vật liệu là những tính chất vật lí thể hiện trong quá trình biến dạng dưới tác dụng của ngoại lực.

⇒ Thông thường, người ta chia vật liệu làm hai loại: *vật liệu dẻo* và *vật liệu giòn*



Hình 3.7

1. Thí nghiệm kéo vật liệu dẻo

Mẫu thử hay mẫu thí nghiệm (hình 3.7).

Quan hệ giữa lượng giãn Δl và lực kéo P được biểu diễn bằng biểu đồ kéo (hình 3.8). Quá trình biến dạng gồm 3 giai đoạn:

\Rightarrow *Giai đoạn thứ nhất: giai đoạn tỉ lệ hay giai đoạn đàn hồi* OA. Giới hạn tỉ lệ hay giới hạn đàn hồi σ_{tl} :

$$\sigma_{tl} = \frac{P_{tl}}{F_0} \quad (3.9)$$

\Rightarrow *Giai đoạn thứ hai: giai đoạn chảy dẻo.*

Ứng suất:

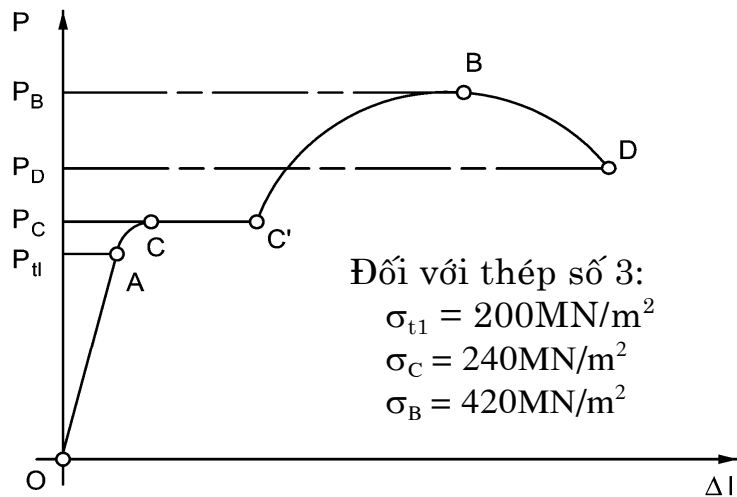
$$\sigma_c = \frac{P_c}{F_0} \quad (3.10)$$

được gọi là *giới hạn chảy (dẻo)*. Trên mặt mẫu sẽ thấy xuất hiện những đường

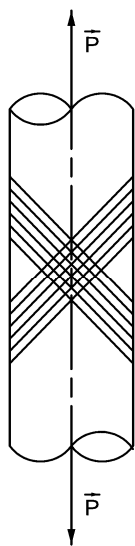
gợn nghiêng với trục thành một góc khoảng 45° (hình 3.9).

\Rightarrow *Giai đoạn thứ ba (giai đoạn củng cố):*

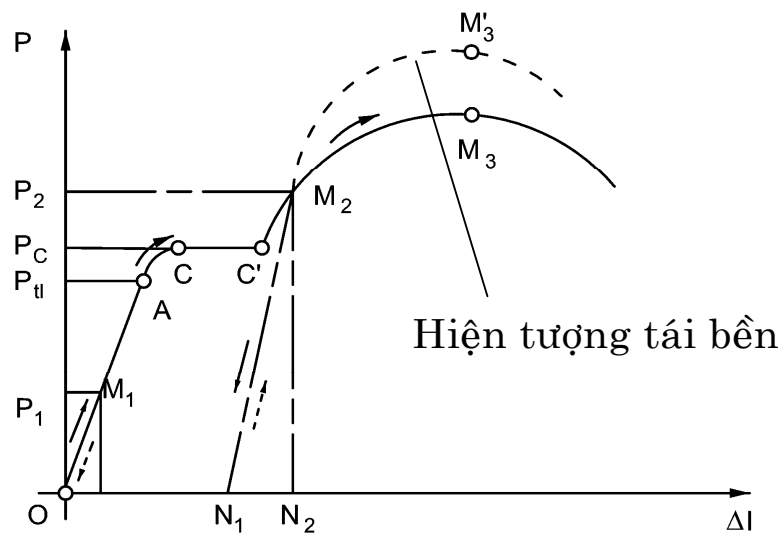
Ứng suất cực đại: $\sigma_B = \frac{P_B}{F_0}$ được gọi là *giới hạn bền*.



Hình 3.8



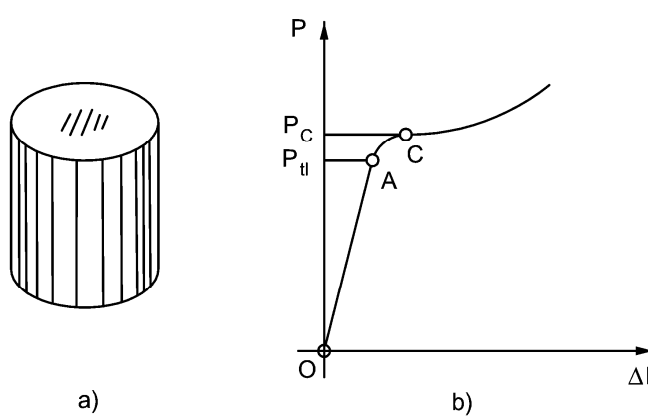
Hình 3.9



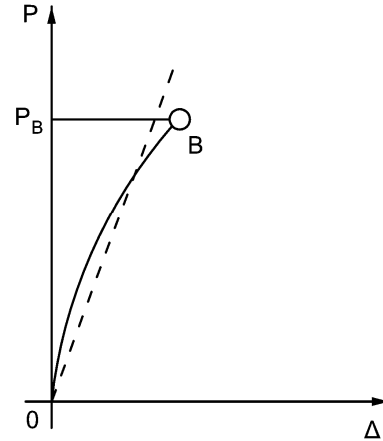
Hình 3.10

2. Thí nghiệm nén vật liệu dẻo

⇒ Mẫu thử thường hình 3.11a. *Biểu đồ nén* (hình 3.11b) có giới hạn tỉ lệ, giới hạn chảy nhưng không có giới hạn bền.



Hình 3.11



Hình 3.12

3. Thí nghiệm kéo và nén vật liệu giòn

⇒ Vật liệu giòn chịu kéo rất kém, nên bị phá hỏng đột ngột ngay khi độ giãn còn rất nhỏ. Hình 3.12 - biểu đồ kéo (P-Δl). Khi bị nén cũng bị phá hỏng ngay khi biến dạng còn nhỏ.

⇒ Vật liệu giòn chỉ có giới hạn bền: $\sigma_B = \frac{P_B}{F_0}$

IV. TÍNH TOÁN VỀ KÉO (NÉN) ĐÚNG TÂM

1. Ứng suất cho phép và điều kiện bền

⇒ Ứng suất cho phép $[\sigma]$: $[\sigma] = \frac{1}{n} \sigma_0$ (3.14)

⇒ Như vậy đối với vật liệu dẻo: $[\sigma]_n = [\sigma]_k = \frac{\sigma_{ch}}{n}$ (3.15)

⇒ Đối với vật liệu giòn, vì khả năng chịu nén tốt hơn chịu kéo $\sigma_B^n > \sigma_B^k$, nên ta có hai ứng suất cho phép khác nhau:

$$[\sigma]_n = \frac{\sigma_B^n}{n} ; [\sigma]_k = \frac{\sigma_B^k}{n} \quad (3.16)$$

⇒ Hệ số an toàn n thường lớn hơn 1.

⇒ Để đảm bảo sự làm việc an toàn khi thanh chịu kéo (nén) đúng tâm, ứng suất trong thanh phải thoả mãn *điều kiện bền*:

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} \leq [\sigma] \quad (3.17)$$

2. Ba loại bài toán cơ bản

⇒ Từ bất đẳng thức (3.17), ta có *ba loại bài toán cơ bản* sau:
a. Kiểm tra bền (bài toán loại 1)

⇒ Điều kiện bền của thanh: $\sigma_{\max} = \frac{N_z}{F} \leq [\sigma]$ (3.18)

⇒ Đối với các vật liệu giòn là:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_z}{F} \leq [\sigma]_k; \quad \sigma_{\min} = \frac{N_z}{F} \leq [\sigma]_n \quad (3.19)$$

b. Chọn kích thước mặt cắt ngang hay thiết kế (bài toán loại 2)

$$F_{\min} \geq \frac{N_z}{[\sigma]} = [F] \quad (3.20)$$

⇒ Để đảm bảo an toàn và tiết kiệm, chỉ nên chọn F xấp xỉ tỷ số $N_z/[\sigma]$ chừng 5% là đủ.

c. Tải trọng cho phép (bài toán loại 3)

$$N_{z\max} \leq F[\sigma] = [N_z] \quad (3.25)$$

⇒ Từ *điều kiện cứng*, cũng dẫn đến ba loại bài toán tương tự.

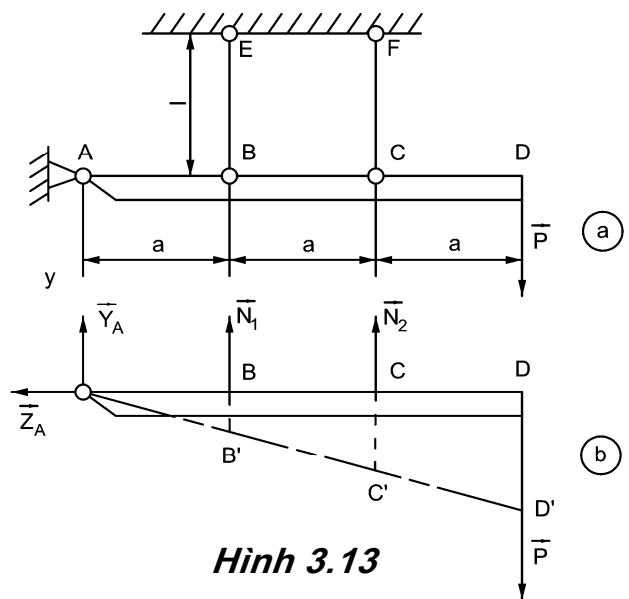
VI. BÀI TOÁN SIÊU TĨNH

⇒ Trong các *bài toán tĩnh định* chỉ cần dựa vào các phương trình cân bằng tĩnh học để xác định nội lực. Trong *bài toán siêu tĩnh* nếu chỉ dựa vào phương trình cân bằng tĩnh học thì không đủ giải được nội lực mà phải dựa thêm vào một số *phương trình bổ sung* lập được nhờ việc xét *điều kiện biến dạng* của cơ hệ. Số phương trình bổ sung gọi là *bậc siêu tĩnh* của cơ hệ.

Ví dụ 3.3. Tìm ứng suất pháp trong các thanh EB và FC làm bằng cùng một loại vật liệu dùng để treo một thanh AD tuyệt đối cứng (hình 3.13). Các thanh treo có diện tích mặt cắt $F = 12\text{cm}^2$.

Giải

Thay liên kết bằng các phản lực liên kết $\bar{Y}_A, \bar{Z}_A, \bar{N}_1, \bar{N}_2$; Lập phương trình cân bằng:



Hình 3.13

$$\sum m_A(F) = 2aN_2 + aN_1 - 3aP = 0 \rightarrow 3P = N_1 + 2N_2 \quad (a)$$

Đây là bài tập toán siêu tĩnh bậc 1. Điều kiện tương thích biến dạng ($\Delta l_1 = BB'$, $\Delta l_2 = CC'$, $\Delta ABB' \sim \Delta ACC'$): $\Delta l_2 = 2\Delta l_1$ (b)

Theo công thức (3.7) ta có: $\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EF}$, $\Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EF}$

Thay vào biểu thức (b), dễ thấy: $N_2 = 2N_1$

$$\Rightarrow N_2 = \frac{6P}{5} = \frac{6 \cdot 160}{5} = 192 \text{ kN}; \quad N_1 = \frac{192}{2} = 96 \text{ kN}$$

Ứng suất trong các thanh EB và FC là:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F} = \frac{96}{12 \cdot 10^{-4}} = 8 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^2 = 80 \text{ MN/m}^2; \quad \sigma_2 = 2\sigma_1 = 160 \text{ MN/m}^2$$

Ví dụ 3.4. Dầm tuyệt đối cứng AB được giữ bởi các thanh thép có $\sigma_{ch} = 24 \text{ kN/cm}^2$ (hình 3.11). Xác định tải trọng cho phép $[q]$.

Biết $n = 1,6$; $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$; $a=2\text{m}$; $b=3\text{m}$.

Bài giải .

Lấy tổng mômen các lực đối với điểm A, ta có:

$$\sum m_A(\vec{F}) = N_1 \cdot 2 + N_2 \cdot 5 - q \cdot 3 \cdot (2 + \frac{3}{2}) = 0 \quad (a)$$

Phương trình phụ tìm được từ điều kiện hai tam giác đồng

$$\text{dạng } ABB' \sim ACC', \text{ ta có: } \frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5 \frac{N_1 l_1}{E_1 F_1} = 2 \frac{N_2 l_2}{E_2 F_2} \quad (b)$$

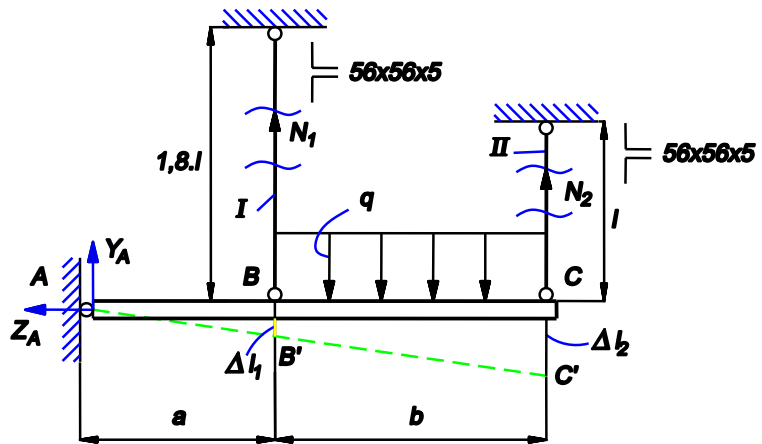
trong đó: $E_1 = E_2 = E$; $F_1 = F_2 = F$; $l_1 = 1,8\text{m}$; $l_2 = 1\text{m}$

$$\text{Giải phương trình (a) và (b) ta được: } N_1 = \frac{21}{44}q; \quad N_2 = \frac{84}{44}q$$

Do $N_2 > N_1$, nên điều kiện bên phải xuất phát từ N_2 . Theo (3.25) ta có: $N_2 = F[\sigma]$.

Tra bảng thép góc $56 \times 56 \times 5$ có: $F = 5,41 \text{ cm}^2$

$$\text{Do } [\sigma] = \frac{\sigma_{ch}}{n} = \frac{24}{1,6} = 15 \text{ kN/cm}^2 \Rightarrow [q] = \frac{5,41 \times 15}{84} \cdot 44 = 42,5 \text{ kN/cm}$$



Hình 3.11

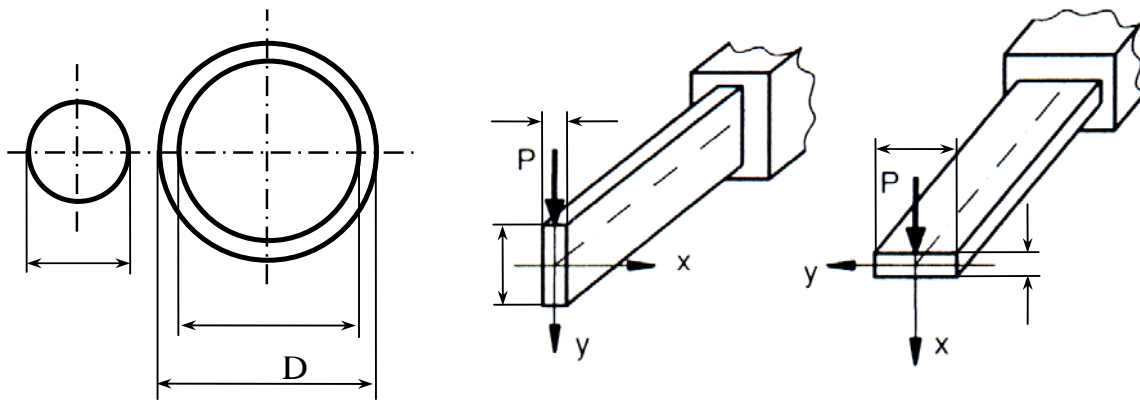
Chương 4. ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA MẶT CẮT NGANG - CÁC THUYẾT BỀN

A. ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA MẶT CẮT NGANG (MCN)

I. KHÁI NIỆM

⇒ Thí nghiệm kéo (nén): khả năng chịu tải của thanh phụ thuộc vào diện tích MCN. Thí nghiệm uốn, xoắn,...: khả năng chịu lực của thanh không những phụ thuộc vào diện tích MCN, mà còn hình dạng và sự bố trí MCN.

Ví dụ thanh tròn rỗng (hình 4.1a) chịu được M_z gấp 2 lần thanh tròn đặc cùng diện tích MCN. Thanh hình chữ nhật đặt đứng (hình 4.1b) ứng suất nhỏ hơn 4 lần khi đặt ngang (hình 4.1c) với cùng diện tích MCN.



Hình 4.1

⇒ Do đó, ngoài diện tích MCN, ta cần xét đến những đại lượng khác đặc trưng cho hình dạng MCN về mặt hình học, đó là *mômen tĩnh* và *mômen quán tính*.

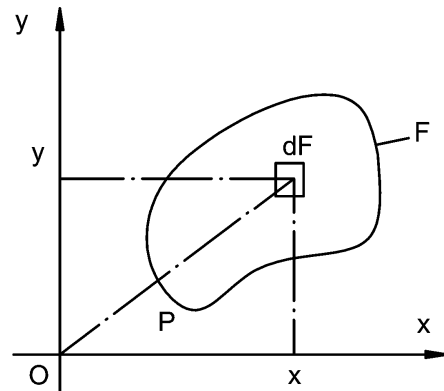
II. MÔMEN TĨNH CỦA MẶT CẮT NGANG

⇒ Hình phẳng F nằm trong mặt phẳng tọa độ Oxy (hình 4.2).

⇒ Người ta gọi tích phân:

$$\int_F x^m y^n dF \quad (4.1)$$

là *mômen diện tích hỗn hợp cấp $(m+n)$* của hình phẳng F đối với hệ Oxy .



Hình 4.2

⇒ Khi $m = 0, n = 1$ tích phân (4.1) có dạng:

$$\boxed{S_x = \int_F y dF} \quad (m^3) \quad (4.2)$$

⇒ Khi $m = 1, n = 0$ tích phân (4.1) có dạng:

$$\boxed{S_y = \int_F x dF} \quad (m^3) \quad (4.3)$$

⇒ S_x và S_y được gọi là *mômen diện tích cấp một* hay **mômen tĩnh** của hình phẳng đối với trục x và trục y .

⇒ Khi $S_x = S_y = 0$ thì trục X, Y được gọi là *trục trung tâm*. Giao điểm của hai trục trung tâm là *trọng tâm* của hình phẳng. (hình 4.3).

⇒ Công thức xác định tọa độ của trọng tâm C cũng tương tự như công thức xác định tọa độ của khối tâm:

$$\boxed{x_C = \frac{S_y}{F}}; \quad \boxed{y_C = \frac{S_x}{F}} \quad (4.4)$$

⇒ Nếu diện tích F bao gồm nhiều diện tích đơn giản F_i :

$$\boxed{x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i F_i}{F}}; \quad \boxed{y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i F_i}{F}} \quad (4.5)$$

trong đó x_i, y_i là tọa độ trọng tâm của diện tích F_i .

III. MÔMEN QUÁN TÍNH (DIỆN TÍCH CẤP HAI)

⇒ Khi $m = n = 1$, tích phân (4.1) có dạng:

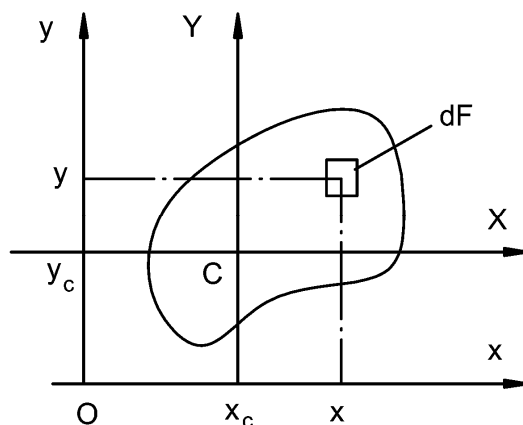
$$\boxed{J_{xy} = \int_F xy dF} \quad (m^4) \quad (4.6)$$

được gọi là *mômen diện tích hỗn hợp cấp hai*, hay **mômen quán tính li tâm** của hình phẳng đối với hệ trục Oxy .

⇒ Khi $m = 0, n = 2$ hoặc $m = 2, n = 0$, các tích phân:

$$\boxed{J_x = \int_F y^2 dF} \quad \text{và} \quad \boxed{J_y = \int_F x^2 dF} \quad (4.7)$$

được gọi là **mômen quán tính** (hay *mômen diện tích cấp hai*) của hình phẳng F đối với trục x hoặc trục y .



Hình 4.3

$\Rightarrow J_{xy}$ có thể dương hoặc âm, còn các J_x, J_y luôn luôn dương.

Tổng:

$$J_x + J_y = \int_F (y^2 + x^2) dF = \int_F \rho^2 dF = J_p \quad (4.8)$$

được gọi là *mômen quán tính độc cực* đối với gốc tọa độ O.

\Rightarrow Nếu $J_{xy} = 0$ thì hệ trục được gọi là *hệ trục quán tính chính*.
Nếu $J_{xy}=0, S_x=S_y=0$ thì ta có *hệ trục quán tính chính trung tâm*.

IV. CÔNG THỨC CHUYỂN TRỤC SONG SONG CỦA MÔMEN QUÁN TÍNH

\Rightarrow Công thức chuyển trục song song mômen quán tính của hệ trục OXY với hệ trục trung tâm oxy (hình 4.4):

$$\begin{aligned} J_X &= J_x + Fb^2 \\ J_Y &= J_y + Fa^2 \\ J_{XY} &= J_{xy} + Fab \end{aligned} \quad (4.9)$$

\Rightarrow Chứng minh các công thức (4.9) như sau: ta có, $X = x + a$; $Y = y + b$ (a)

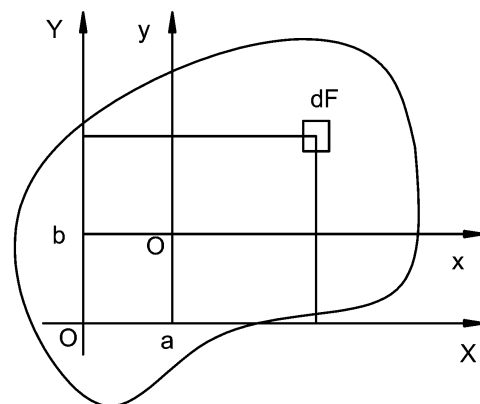
\Rightarrow Theo định nghĩa:

$$J_X = \int_F Y^2 dF, J_Y = \int_F X^2 dF, J_{XY} = \int_F XY dF \quad (b)$$

\Rightarrow Thay (a) vào (b) suy ra:

$$J_X = J_x + 2bS_x + Fb^2; J_Y = J_y + 2aS_y + Fa^2; J_{XY} = J_{xy} + aS_x + bS_y + Fab$$

\Rightarrow Khi x và y là các trục trung tâm thì $S_x = S_y = 0 \Rightarrow (4.9)$.



Hình 4.4

V. CÔNG THỨC XOAY TRỤC CỦA MÔMEN QUÁN TÍNH

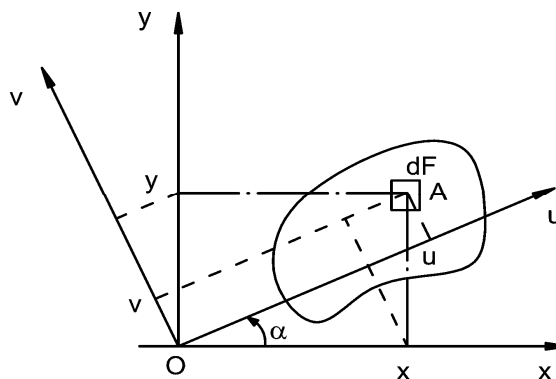
\Rightarrow Cho biết J_x, J_y, J_{xy} của hình phẳng F đối với hệ trục Oxy. Hãy tính J_u, J_v, J_{uv} của hình phẳng F đối với hệ trục Ouv (hình 4.5). Ta có:

$$u = x \cos \alpha + y \sin \alpha$$

$$v = y \cos \alpha - x \sin \alpha$$

$$J_u = \int_F v^2 dF; J_v = \int_F u^2 dF; J_{uv} = \int_F uv dF$$

\Rightarrow Thay u, v ở trên và khai triển các tích phân này, ta được:



Hình 4.5

$$\begin{aligned}
J_u &= \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha \\
J_v &= \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha + J_{xy} \sin 2\alpha \\
J_{uv} &= \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha
\end{aligned}
\tag{4.10}$$

Nếu hệ trục Ouv là hệ trục quán tính chính ($J_{uv} = 0$) thì phương các trục quán tính chính rút ra từ công thức thứ ba của (4.10):

$$\tg \alpha = - \frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}
\tag{4.11}$$

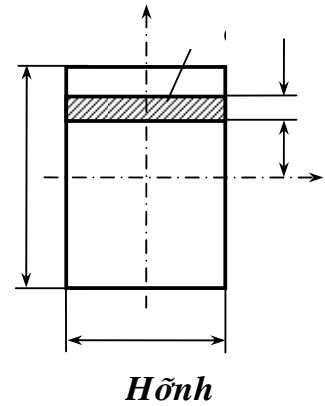
VI. MÔMEN QUÁN TÍNH CỦA MỘT SỐ MẶT CẮT NGANG

1. Hình chữ nhật (hình 4.6)

Hệ trục đối xứng Oxy là hệ trục quán tính chính trung tâm.

$$\text{Ta có: } J_x = \int_F y^2 dF = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = \frac{1}{3} b y^3 \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$$

$$\text{hay: } J_x = \frac{bh^3}{12} \Rightarrow J_y = \frac{hb^3}{12}
\tag{4.12}$$

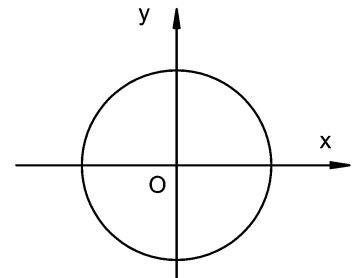


3. Hình tròn (hình 4.7)

Đối với hệ trục trung tâm Oxy: $J_x = J_y = \frac{J_p}{2}$

$$\text{trong đó: } J_p = \frac{\pi R^4}{2} \approx 0,1D^4$$

$$\text{nên: } J_x = J_y = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64} \approx 0,05D^4
\tag{4.13}$$



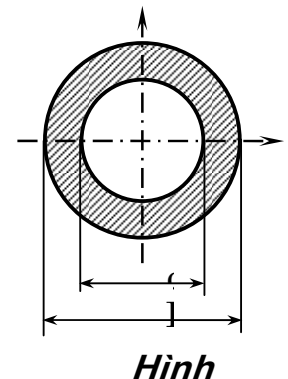
4. Hình vành khăn (hình 4.8)

Đối với hình vành khăn có đường kính ngoài D và đường kính trong d:

$$J_x = J_y = \frac{1}{2} J_p = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \eta^4) \approx 0,05D^4 (1 - \eta^4);$$

Với $\eta = d/D$

$$\tag{4.14}$$

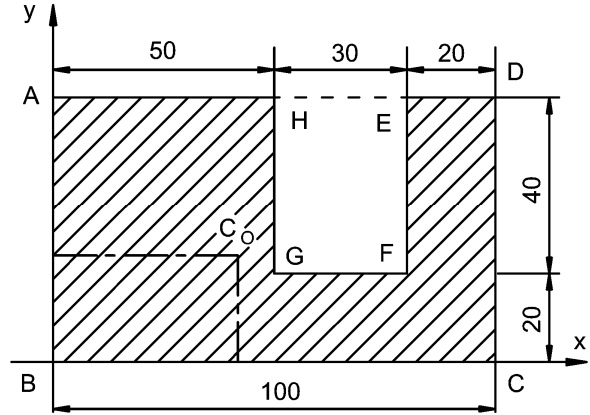


VII. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 4.1. Xác định vị trí trọng tâm C_o và các mômen diện tích cấp hai J_x, J_y của mặt cắt cho trên hình 4.9 (đơn vị là cm).

Giải

Coi mặt cắt đã cho là hiệu của hai hình chữ nhật ABCD (kí hiệu là 1) và EFGH (kí hiệu là 2). Ta có: $S_x = S_x^1 - S_x^2$



Hình

trong đó: $S_x^1 = F_1 y_{C_1} = (100 \times 60) \left(\frac{60}{2} \right) = 180.000 \text{ cm}^3$

$$S_x^2 = F_2 y_{C_2} = (30 \times 40) \left(20 + \frac{40}{2} \right) = 48.000 \text{ cm}^3$$

Do đó: $S_x = 180.000 - 48.000 = 132.000 \text{ cm}^3$; $S_y = S_y^1 - S_y^2$

trong đó: $S_y^1 = F_1 x_{C_1} = (100 \times 60) \left(\frac{100}{2} \right) = 300.000 \text{ cm}^3$

$$S_y^2 = F_2 x_{C_2} = (30 \times 40) \left(50 + \frac{30}{2} \right) = 78.000 \text{ cm}^3$$

Vậy: $S_y = 300.000 - 78.000 = 222.000 \text{ cm}^3$

Toạ độ trọng tâm C_o của mặt cắt là:

$$x_{C_o} = \frac{S_y}{F} = \frac{222.000}{(100 \times 60) - (30 \times 40)} = 46,25 \text{ cm}; \quad y_{C_o} = \frac{S_x}{F} = \frac{132.000}{4800} = 27,5 \text{ cm}$$

$$J_x = J_x^1 - J_x^2$$

trong đó: $J_x^1 = \frac{b_1 h_1^3}{3} = \frac{100 \times 60^3}{3} = 72 \times 10^5 \text{ cm}^4$

$$J_x^2 = \frac{b_2 h_2^3}{12} + F_2 y_{C_2}^2 = \frac{30 \times 40^3}{12} + (30 \times 40) \cdot 40^2 = 20,8 \times 10^5 \text{ cm}^4$$

Do đó: $J_x = (72 - 20,8) 10^5 = 51,2 \times 10^5 \text{ cm}^4$; $J_y = J_y^1 - J_y^2$

trong đó: $J_y^1 = \frac{h_1 b_1^3}{3} = \frac{60 \times 100^3}{3} = 20 \times 10^6 \text{ cm}^4$

$$J_y^2 = \frac{h_2 b_2^3}{12} + F_2 x_{C_2}^2 = \frac{40 \times 30^3}{12} + (30 \times 40) \cdot 65^2 = 5,16 \times 10^6 \text{ cm}^4$$

Vậy $J_y = (20 - 5,16) 10^6 = 14,84 \times 10^6 \text{ cm}^4$.

B. CÁC THUYẾT BỀN

I. KHÁI NIỆM

⇒ Đối với các chi tiết máy được bền an toàn thì trạng thái ứng suất ở mọi điểm không được vượt quá trạng thái ứng suất nguy hiểm của vật liệu (trạng thái ứng suất giới hạn - σ_0 và τ_0).

⇒ Ứng suất giới hạn của trạng thái ứng suất đơn dễ dàng được xác định bằng thực nghiệm. Ví dụ, đối với vật liệu dẻo ứng suất giới hạn là giới hạn chảy σ_{ch} (hoặc τ_{ch}), đối với vật liệu giòn là σ_B (hay τ_B). Tuy nhiên, thực tế người ta hay tính theo ứng suất cho phép $[\sigma]$ (hay $[\tau]$).

⇒ Kiểm tra bền ở trạng thái ứng suất đơn, trượt thuần túy:

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 \leq [\sigma]_k; \quad |\sigma_{\min}| = |\sigma_3| \leq [\sigma]_n; \quad \tau_{\max} \leq [\tau] \quad (4.19)$$

⇒ Khi kiểm tra bền ở trạng thái ứng suất phức tạp (phẳng, khối), cần làm các thí nghiệm phá hỏng ở trạng thái ứng suất. Việc xác định trạng thái ứng suất giới hạn bằng thực nghiệm *rất khó khăn* thực tế có khi *không thực hiện được*, vì:

♦ Số lượng thí nghiệm phát rất nhiều, đáp ứng tỷ lệ σ_1 , σ_2 và σ_3

♦ Trình độ kỹ thuật và thiết bị chưa cho phép thí nghiệm trạng thái ứng suất phức tạp.

⇒ Do đó người ta đưa ra các *thuyết bền*, nhằm đưa trạng thái ứng suất phức tạp về trạng thái ứng suất đơn tương đương. Gọi ứng suất chính của trạng thái ứng suất đơn tương đương là σ_{td} (σ_{td} liên hệ với các ứng suất chính σ_1 , σ_2 và σ_3). Điều kiện bền có dạng:

$$\boxed{\sigma_{td} \leq [\sigma]} \quad (4.20)$$

⇒ Thuyết bền cho phép thiết lập mối quan hệ giữa ứng suất tương đương với các ứng suất chính. Nói một cách khác, thuyết bền là những giả thuyết về nguyên nhân phá hoại của vật liệu, trên cơ sở đó cho phép ta xác định được độ bền của vật liệu ở

mọi trạng thái ứng suất khi ta chỉ biết độ bền của vật liệu ở trạng thái ứng suất đơn.

⇒ Dưới đây chúng ta sẽ nghiên cứu những thuyết bền cơ bản nhất và phổ biến nhất.

II. CÁC THUYẾT BỀN

1. Thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất (USTLN)

⇒ Thuyết bền USTLN do Culông (Coulomb) đưa ra năm 1773. Thuyết này cho rằng: vật liệu bị phá hoại là do ứng suất tiếp cực đại của phân tố ở trạng thái ứng suất phức tạp đạt đến ứng suất tiếp nguy hiểm của phân tố ở trạng thái ứng suất đơn.

⇒ Hai trạng thái ứng suất phức tạp và đơn sẽ có độ bền tương đương nếu ứng suất tiếp lớn nhất của chúng bằng nhau.

⇒ Điều kiện bền là: $\tau_{\max} \leq [\tau_{\text{đơn}}]$ (a)

⇒ Ta biết $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ (chương 3), $\tau_{\text{đơn}}^{\max} = \frac{\sigma}{2}$, $[\tau_{\text{đơn}}] = \frac{[\sigma]}{2}$ (chương 2)

⇒ Do đó điều kiện bền theo giả thuyết ứng suất tiếp lớn nhất:

$$\sigma_{\text{td}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] \quad (4.22)$$

⇒ Trong trường hợp ứng suất phẳng đặc biệt (hình 4.10), ta có:

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}; \quad \sigma_3 = \sigma_{\min} = \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (4.23)$$

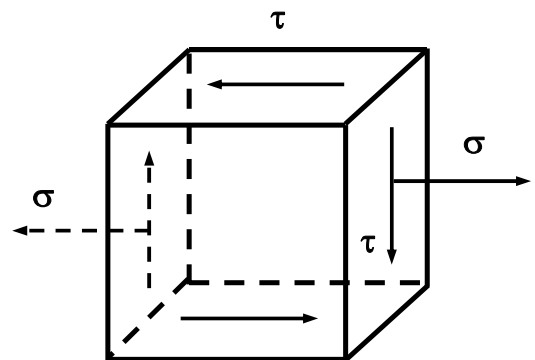
⇒ Điều kiện bền theo giả thuyết ứng suất tiếp lớn nhất:

$$\sigma_{\text{td}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] \quad (4.24)$$

⇒ Thuyết bền USTLN rất phù hợp với vật liệu dẻo nhưng lại không thích hợp đối với vật liệu giòn. Thiếu sót của thuyết này là không kể đến ứng suất chính σ_2 .

⇒ Thuyết USTLN cho phép giải thích vì sao vật liệu bị nén đều theo tất cả các phương có thể chịu được những áp suất

rất cao, vì trong trường hợp này thì $\sigma_1 = \sigma_3 = -p \Rightarrow$ dù áp suất p có lớn tới đâu σ_{td} cũng luôn luôn bằng không.



Hình 4.10

2. Thuyết bền thế năng biến đổi hình dạng (TNBĐHD)

⇒ Thuyết bền TNBĐHD do Huybe đưa ra năm 1904. Thuyết này cho rằng: vật liệu bị phá hoại là do thế năng biến đổi hình dạng của phân tử ở trạng thái ứng suất phức tạp đạt đến TNBĐHD ở trạng thái ứng suất nguy hiểm của phân tử ở trạng thái ứng suất đơn.

⇒ Hai trạng thái ứng suất phức tạp và đơn sẽ có độ bền tương đương nếu thế năng riêng biến đổi hình dạng của chúng bằng nhau.

⇒ Trạng thái ứng suất khối:

$$u_{hd} = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1)$$

⇒ Trạng thái ứng suất đơn:

$$u_{hd} = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_{td}^2$$

⇒ Điều kiện bền có dạng:

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \leq [\sigma]_k \quad (4.25)$$

⇒ Trong trường hợp trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt:

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma] \quad (4.26)$$

⇒ Thuyết bền TNBĐHD phù hợp đối với vật liệu dẻo, nhưng đối với vật liệu giòn thì cũng không thích hợp. Mặt khác thuyết này vẫn chưa giải thích được sự phá hoại của vật liệu khi bị kéo đều theo 3 phương.

III. ÁP DỤNG CÁC THUYẾT BỀN

⇒ Trong thực tế tính toán, việc chọn thuyết bền nào là phụ thuộc vào loại vật liệu sử dụng và trạng thái ứng suất của điểm kiểm tra. Nếu là vật liệu dẻo ta dùng thuyết thứ ba hoặc thứ tư, vật liệu giòn ta nên dùng thuyết bền Mo.

⇒ Gần đây xuất hiện nhiều thuyết mới liên quan chủ yếu đến các loại vật liệu mới như chất dẻo, sợi thủy tinh, chất dẻo nhiều lớp, v.v.

⇒ Các nghiên cứu thực nghiệm và lý thuyết cho thấy rằng cấu trúc của tinh thể vật rắn biến dạng có ảnh hưởng lớn đến biến dạng và phá hỏng của vật liệu đó. Nếu bỏ qua ảnh hưởng đó thì kết quả tính toán theo các thuyết bền sẽ bị sai lệch. Do đó người ta đang tiếp tục nghiên cứu về vấn đề này.

Ví dụ. Kiểm tra bền của phân tố vật thể chịu các ứng suất:
 $\sigma_x = -4 \text{ kN/cm}^2$, $\sigma_y = -6 \text{ kN/cm}^2$, $\sigma_z = 3 \text{ kN/cm}^2$, $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 2 \text{ kN/cm}^2$, $\tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$. Cho biết $[\sigma] = 12 \text{ kN/cm}^2$.

Giải: Nếu coi $\sigma_z = 3 \text{ kN/cm}^2$ là một ứng suất chính của phân tố thì hai ứng suất chính còn lại:

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{-4 - 6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4 + 6}{2}\right)^2 + 2^2}$$

$$\sigma_{\max} = -2,764 \text{ kN/cm}^2 ;$$

$$\sigma_{\min} = -7,236 \text{ kN/cm}^2$$

Như vậy:

$$\sigma_1 = 3 \text{ kN/cm}^2 ;$$

$$\sigma_2 = -2,764 \text{ kN/cm}^2 ;$$

$$\sigma_3 = -7,236 \text{ kN/cm}^2$$

Theo thuyết bền USTLN:

$$\sigma_{td} = \sigma_1 - \sigma_3 = 3 - (-7,236) = 10,236 \leq [\sigma]$$

Theo thuyết bền TNBĐHD:

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = 8,888 \leq [\sigma]$$

Như vậy phân tố đủ bền theo cả hai thuyết bền.

Chương 5. XOẮN THUẦN TUYẾT THANH THẲNG

I. KHÁI NIỆM VỀ XOẮN THUẦN TUYẾT

1. Định nghĩa

⇒ Một thanh chịu xoắn thuần túy khi trên MCN chỉ có một thành phần nội lực là mômen xoắn M_z (hình 5.1).

⇒ Ngẫu lực P-P tạo ra mômen xoắn, có giá trị bằng P.a.

2. Liên hệ giữa mômen xoắn ngoại lực với công suất và số vòng quay

⇒ Công do mômen xoắn ngoại lực M (Nm) thực hiện khi trục quay một góc α theo thời gian t: $A = M\alpha$

⇒ Do đó công suất N (watt-W): $N = \frac{A}{t} = \frac{M\alpha}{t} = M\omega \Rightarrow M = \frac{N}{\omega}$
trong đó ω - vận tốc góc (rad/s); n là tốc độ [vòng/phút (v/ph)].

⇒ Vận tốc góc: $\omega = \frac{\pi n}{30} \text{ rad/s}$

⇒ Nếu công suất N tính bằng kW thì: $M = 9549 \frac{N}{n} \text{ (Nm)}$

⇒ Nếu công suất tính bằng mã lực thì: $M = 7162 \frac{N}{n} \text{ (Nm)}$.

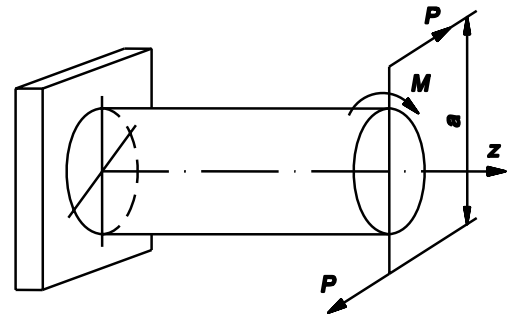
3. Các giả thuyết tính toán

Quan sát đoạn thanh tròn chịu xoắn (hình 5.2) trước và sau khi biến dạng, thấy:

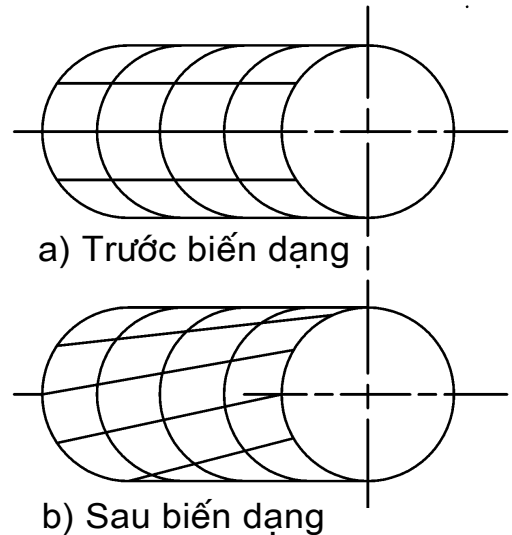
⇒ MCN ban đầu phẳng và thẳng góc với trục thanh thì sau khi biến dạng vẫn phẳng và thẳng góc với trục thanh, khoảng cách giữa các mặt cắt không thay đổi.

⇒ Các bán kính của thanh trước và sau khi biến dạng vẫn thẳng và có độ dài không đổi.

⇒ Nói một cách vắn tắt, khi thanh tròn chịu xoắn, chỉ xảy ra hiện tượng quay của tiết diện ngang quanh trục thanh. Nhận xét này đã được lí thuyết và thực nghiệm xác minh là đúng.



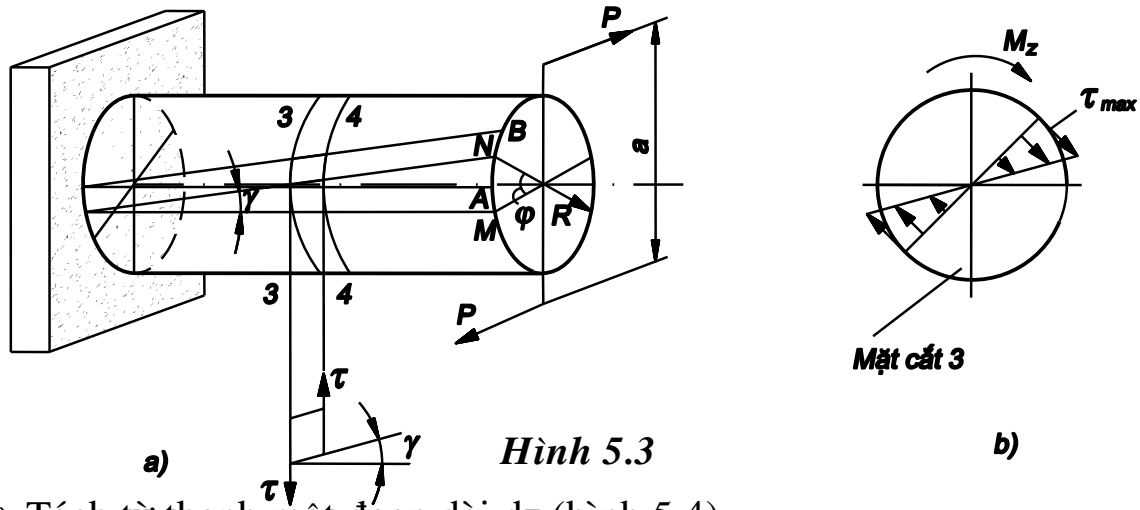
Hình 5.1



Hình 5.2

II. ỨNG SUẤT TRÊN MẶT CẮT CỦA THANH TRÒN CHỊU XOẮN

⇒ Khảo sát một thanh tròn chịu xoắn thuần túy (hình 5.3a).



⇒ Tách từ thanh một đoạn dài dz (hình 5.4)

⇒ Theo quan hệ giữa nội lực và ứng suất ta có:

$$M_z = \int_F \tau_\rho \rho dF \quad (a)$$

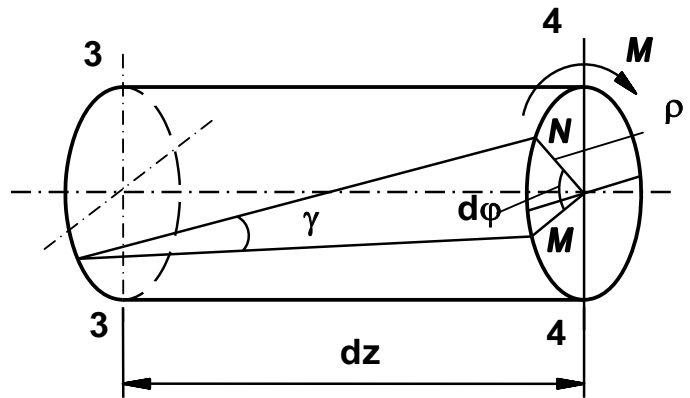
⇒ Mặt khác theo định luật Húc:

$$\tau_\rho = G \cdot \gamma \quad (b)$$

τ_ρ là ứng suất tiếp trên MCN tại điểm cách trọng tâm mặt cắt một khoảng bằng ρ .

⇒ Theo hình 5.4, ta có:

$$\gamma \approx \tan \gamma = \frac{\rho d\phi}{dz} \quad (c)$$



Hình 5.4

với $d\phi$ là góc xoắn tương đối giữa 2 mặt cắt 3-3 và 4-4; dz là khoảng cách giữa 2 mặt cắt đó.

⇒ Ký hiệu: $\theta = \frac{d\phi}{dz}$ là góc xoắn tỷ đối.

⇒ Thay (c) vào (b) rồi vào (a), ta có:

$$M_z = \int_F G \cdot \theta \cdot \rho^2 dF = G \cdot \theta \cdot J_p \Rightarrow \theta = \frac{M_z}{G \cdot J_p} \quad (5-1)$$

⇒ Thay (5-1) vào (c) rồi vào (b), ta có:

$$\tau_\rho = \frac{M_z}{J_p} \cdot \rho \quad (5-2)$$

$$\Rightarrow \text{Ứng suất tiếp lớn nhất: } \boxed{\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p}} \quad (5-3)$$

trong đó: $W_p = \frac{J_p}{R}$ gọi là môđun chống xoắn của mặt cắt ngang có thứ nguyên là (chiều dài)³; R là bán kính của mặt cắt ngang.

- Đối với hình tròn: $W_p = \frac{J_p}{R} = \frac{\pi D^3}{16} \approx 0,2D^3$

- Đối với hình vành khăn: $W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \eta^4) \approx 0,2D^3 (1 - \eta^4)$; $\eta = \frac{d}{D}$

\Rightarrow Biểu đồ ứng suất biểu diễn như trên hình (5.3b). Ta thấy ứng suất tiếp phân bố theo quy luật bậc nhất phụ thuộc vào khoảng cách ρ đến trọng tâm mặt cắt ngang.

III. BIẾN DẠNG

\Rightarrow Biến dạng tại mặt cắt z của thanh tròn khi xoắn được thể hiện bằng góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt ngang cách nhau một đơn vị chiều dài, gọi là *góc xoắn tỉ đối*, từ (5.1) ta có:

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GJ_p} \quad (\text{rad/m}) \quad (5-4)$$

\Rightarrow Góc xoắn tương đối giữa hai MCN cách nhau một khoảng dz là

$$d\varphi = \frac{M_z}{GJ_p} dz$$

\Rightarrow Góc xoắn tương đối giữa hai MCN cách nhau một khoảng l gọi là *góc xoắn tương đối* của thanh:

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_z}{GJ_p} dz \quad (\text{rad}) \quad (5-5)$$

$\Rightarrow GJ_p$ được gọi là *độ cứng xoắn*. Nếu trong suốt chiều dài l của thanh, tỷ số $\frac{M_z}{GJ_p}$ không đổi hoặc không đổi trong từng đoạn có chiều dài l_i :

$$\boxed{\varphi = \frac{M_z l}{GJ_p}} \quad \text{hoặc} \quad \boxed{\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{M_z l_i}{G_i J_{pi}}} \quad (5-6)$$

Từ các công thức trên ta thấy khi chịu xoắn, đặc trưng hình học của MCN không phải là diện tích F mà là mômen độ cứng J_p .

IV. TÍNH TOÁN VỀ XOẮN THUẦN TUYỆT

⇒ Đảm bảo điều kiện bền và điều kiện cứng.

1. Điều kiện bền

⇒ Điều kiện bền:
$$\tau_{\max} = \frac{M_{z\max}}{W_p} \leq [\tau] \quad (5.7)$$

$[\tau]$ là ứng suất tiếp cho phép của vật liệu, xác định như sau:

$$[\tau] = \frac{[\sigma]_k}{2} \quad \text{hoặc} \quad [\tau] = \frac{[\sigma]_k}{\sqrt{3}} \quad (5.8)$$

⇒ Đối với vật liệu dẻo: $[\tau] = \frac{\tau_{ch}}{n}$, vật liệu giòn: $[\tau] = \frac{\tau_B}{n}$ (5.9)

⇒ Điều kiện bền trên toàn thanh khi đường kính thay đổi:

$$\tau_{\max} = \left(\frac{M_z}{W_p} \right)_{\max} \leq [\tau] \quad (5.10)$$

⇒ Với công thức (5.7) ta có ba loại bài toán cơ bản sau:

a. Kiểm tra bền: theo công thức (5.7).

b. Chọn kích thước mặt cắt ngang:
$$W_p \geq \frac{M_z}{[\tau]} = [W_p] \quad (5.11)$$

c. Tính tải trọng cho phép:
$$M_z \leq W_p [\tau] = [M_z] \quad (5.12)$$

2. Điều kiện cứng

⇒ Góc xoắn tỉ đối (hay biến dạng xoắn) lớn nhất không vượt quá giới hạn cho phép:

$$\theta_{\max} = \frac{M_z}{GJ_p} \leq [\theta] \quad [\text{rad/chiều dài}] \quad \text{hoặc} \quad [\text{độ/chiều dài}] \quad (5.13)$$

trong đó $[\theta]$ là góc xoắn tỉ đối cho phép (tra bảng). Nếu $[\theta]$ được cho bằng (độ/chiều dài) ⇒ công thức quy đổi sau:

$$[\theta] \text{ rad/chiều dài} = \frac{\pi}{180} \cdot [\theta] \text{ độ/chiều dài} \quad (5.14)$$

⇒ Theo công thức 5.13 ta cũng có ba loại bài toán sau:

a. Kiểm tra điều kiện cứng: theo công thức 5.13

b. Tính kích thước mặt cắt ngang:
$$J_p \geq \frac{M_z}{G[\theta]} = [J_p] \quad (5.15)$$

c. Tính tải trọng cho phép:
$$M_z \leq GJ_p [\theta] = [M_z] \quad (5.17)$$

⇒ Khi tính toán theo cả điều kiện bền và cứng, điều kiện nào có ảnh hưởng nhiều hơn thì lấy kết quả theo điều kiện ấy. Đối với thanh mảnh, điều kiện cứng thường có ảnh hưởng nhiều hơn.

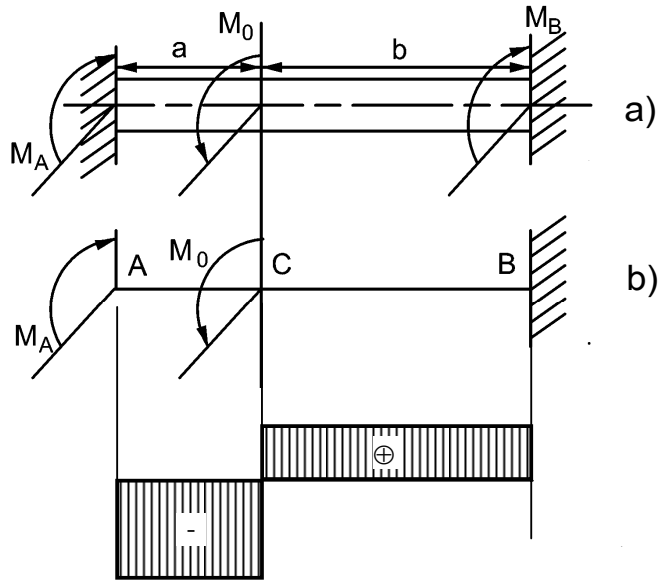
V. BÀI TOÁN SIÊU TĨNH VỀ XOẮN

⇒ Một thanh tròn bị ngàm ở hai đầu chịu tác dụng của ngẫu lực M_0 như hình 5.5a. Vẽ biểu đồ nội lực của thanh.

⇒ Ngẫu lực liên kết M_A và M_B . Để xác định chúng, chỉ có một phương trình cân bằng tĩnh học:

$$M_A - M_0 + M_B = 0 \quad (a)$$

⇒ Muốn giải bài toán siêu tĩnh (bậc một) này, phải dựa vào điều kiện biến dạng của thanh để lập thêm một phương trình bổ sung. Tưởng tượng bỏ ngàm A và thay thế bằng phản ngẫu lực M_A , ta được thanh tĩnh định (hình 5.5b).



Hình 5.5

⇒ Điều kiện thay thế là góc xoắn φ_{AB} phải bằng không, để bảo đảm sự tương đương về biến dạng với thanh siêu tĩnh đã cho, do đó:

$$\varphi_{AB} = \varphi_{AC} + \varphi_{CB} = \frac{-M_A a}{GJ_p} + \frac{(-M_A + M_0)b}{GJ_p} = 0 \quad (b)$$

Giải phương trình trên, được: $M_A = \frac{b}{a+b} M_0 \quad (c)$

thay (c) vào (a), suy ra: $M_B = \frac{a}{a+b} M_0 \quad (d)$

⇒ (Nếu M_A và M_B tính được ở trên mang thêm dấu âm, thì chúng có chiều ngược với chiều giả thiết ban đầu).

⇒ Sau khi xác định được các phản ngẫu lực M_A , M_B sẽ vẽ được biểu đồ mômen xoắn $M_z(z)$ của thanh như hình 5.5c.

VI. Ví dụ áp dụng

Ví dụ 5.1: Vẽ biểu đồ M_z cho thanh chịu lực như hình 5.6.

Bài giải

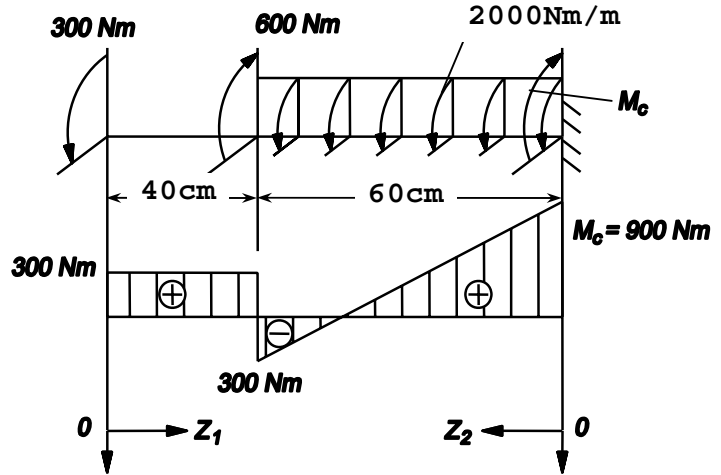
1. Phản lực tại ngàm C: $\sum M_z = 0 \rightarrow M_c = 900 \text{ Nm}$

2. Chia dầm thành hai đoạn:
 - Đoạn AB cắt thanh ở mặt cắt z_1 ($0 \leq z_1 \leq 40\text{cm}$) và xét sự cân bằng phần trái, ta tìm được $M_{z_1} = 300\text{ Nm}$.

- Đoạn BC cắt thanh ở mặt cắt z_2 và xét sự cân bằng phần phải ta có:

$$M_{z_2} = 900 - 2000 \cdot z_2$$

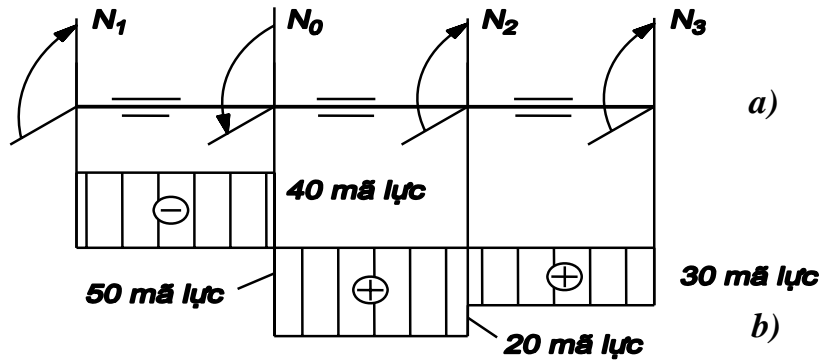
Vẽ biểu đồ M_z như trên hình 5.6.



Hình 5.6

Ví dụ 5.2: Cho một trục MCN hình vành khăn (đường kính d, D) chịu lực như hình 5.7a. Các puli 1, 2, 3 là bị động có công suất $N_1 = 40$ mã lực, $N_2 = 20$ mã lực, $N_3 = 30$ mã lực, puli 0 là chủ động.

Cho biết $n = 1000\text{ vg/ph}$,
 $\eta = d/D = 0,6$, $[\tau] = 4500\text{ N/cm}^2$, $G = 8 \cdot 10^6\text{ N/cm}^2$,
 $\theta^0 = 2^0/\text{m}$. Xác định D, d .



Hình 5.7

Bài giải: Biểu đồ công suất được vẽ trên hình 5.7b.

Mặt cắt nguy hiểm có $N_0 = 50$ mã lực

$$\Rightarrow M_{z_{\max}} = \frac{7162}{n} N = \frac{716200}{1000} 50 (\text{Ncm})$$

Chọn kích thước theo điều kiện bền (5-11), ta có: $W_p \geq \frac{M_z}{[\tau]}$

$$\Rightarrow W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \eta^4) = \frac{716200 \cdot N_0}{n [\tau]} \Rightarrow D \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 716200 \cdot N_0}{\pi n [\tau] (1 - \eta^4)}} \approx 3,64 \text{ cm}$$

Chọn kích thước theo điều kiện cứng, ta có: $\theta_{\max} = \frac{M_z}{GJ_p} \leq [\theta]$

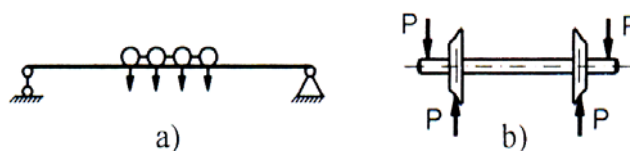
$$\Rightarrow J_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \eta^4) \geq \frac{716200 N_0 \times 100 \times 180}{n \cdot G \cdot [\theta^0] \pi} \Rightarrow D = 3,49 \text{ cm}$$

So sánh ta chọn: $D = 3,64$; $d = 3,64 \cdot 0,6 = 2,18 \text{ cm}$.

Chương 6. UỐN PHẪNG

I. KHÁI NIỆM VỀ UỐN PHẪNG

1. Khái niệm chung: Một thanh chịu uốn (gọi là *dầm*) khi trục của thanh bị uốn cong dưới tác dụng của ngoại lực, ví dụ dầm cầu, trục bánh xe hỏa, ô tô,.. Hình 6.1 biểu diễn một số dầm chịu uốn.

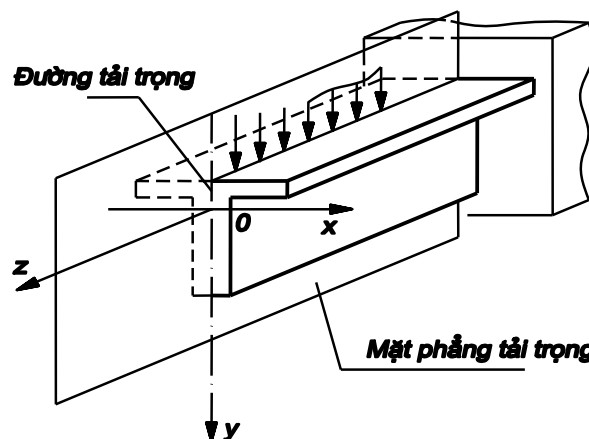


Hình 6.1

⇒ Mặt phẳng chứa các lực và mômen được gọi là *mặt phẳng tải trọng* (hình 6.2).

⇒ *Đường tải trọng* là giao tuyến giữa mặt phẳng tải trọng và MCN của thanh.

⇒ *Mặt phẳng quán tính chính trung tâm* tạo nên bởi trục của thanh và một trục quán tính chính trung tâm của MCN.



Hình 6.2

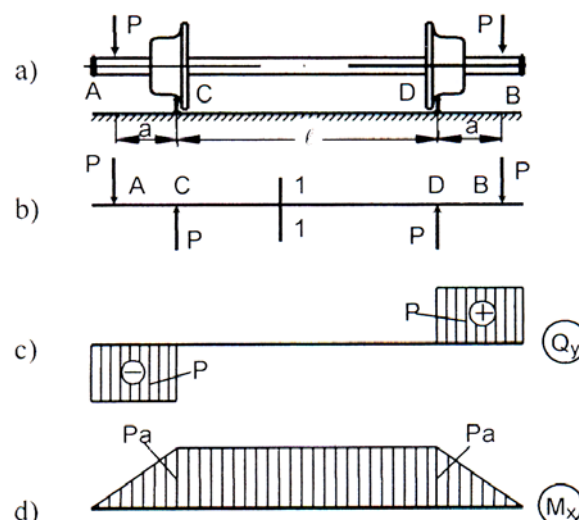
⇒ Trục của dầm sau khi bị uốn cong vẫn nằm trong một mặt phẳng quán tính chính trung tâm thì sự uốn đó được gọi là *uốn phẳng*.

2. Phân loại uốn phẳng

⇒ Uốn phẳng chia ra làm hai loại: *uốn thuần túy* và *uốn ngang phẳng*.

⇒ Uốn thuần túy phẳng: Trên MCN của dầm chỉ có một thành phần mômen uốn M_x (M_y) nằm trong mặt phẳng quán tính chính trung tâm. Đoạn CD trên hình 6.3 mô tả dầm chịu uốn thuần túy.

⇒ Uốn ngang phẳng: Trên MCN của nó có hai thành phần nội lực là lực cắt Q_y và mômen uốn M_x (hoặc Q_x và M_y). Trên hình 6.3, đoạn AC và DB chịu uốn ngang phẳng vì trên các mặt cắt ngang có cả lực cắt Q_y và mômen uốn M_x .

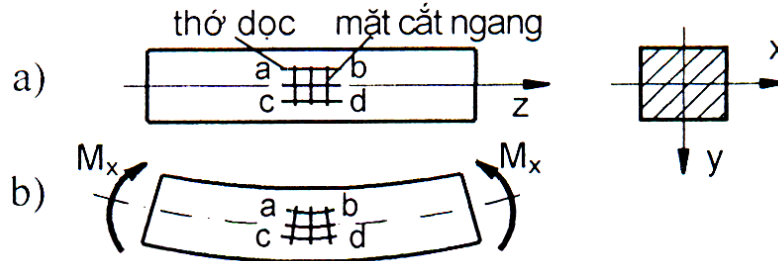


Hình 6.3

II. DẦM CHỊU UỐN PHẪNG THUẦN TÚY

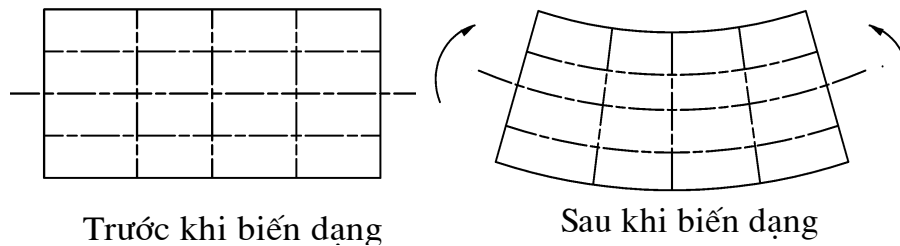
1. Thí nghiệm và các giả thuyết

⇒ Xét một dầm chịu uốn phẳng thuần túy như hình 6.4.



Hình 6.4

⇒ Quan sát một đoạn dầm chịu uốn phẳng thuần túy có MCN hình chữ nhật trước và sau khi biến dạng (hình 6.5).



Hình 6.5

Từ các thí nghiệm dầm chịu uốn phẳng thuần túy ⇒ một số giả thuyết
⇒ *Giả thuyết về MCN phẳng (Bécnu-li)*: MCN của thanh trước và sau biến dạng vẫn phẳng và vuông góc với trục của thanh.

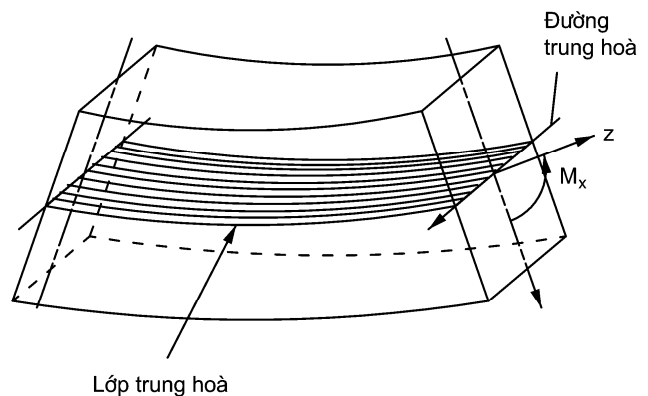
⇒ *Giả thuyết về các thớ dọc*: trong suốt quá trình biến dạng các thớ dọc luôn song song với nhau và song song với trục thanh.

⇒ Ngoài hai giả thuyết trên ta còn giả thuyết về biến dạng bé, MCN hầu như không bị biến dạng.

2. Quan hệ biến dạng

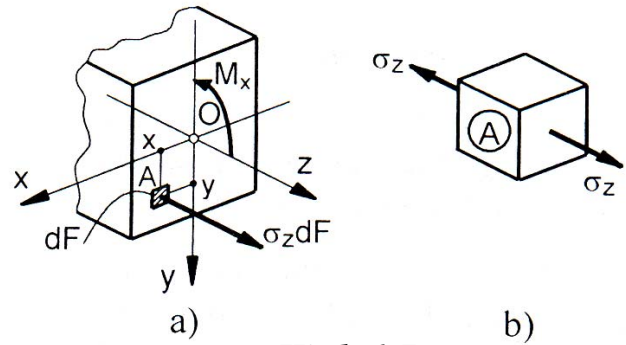
⇒ Quan sát biến dạng của dầm chịu uốn phẳng thuần túy như hình 6.4 ta thấy: thớ trên ab bị co lại, thớ dưới cd bị giãn ra. Do đó chắc chắn phải có một thớ không co, không giãn gọi là *thớ trung hoà*. Các thớ trung hoà tạo thành *mặt trung hoà* (*lớp trung hoà*).

Giao tuyến của mặt trung hoà với MCN gọi là *đường trung hoà* (*trục trung hoà*) (hình 6-6).



Hình 6.6

⇒ Xét một MCN nào đó và chọn hệ trục tọa độ như hình 6.2 với trục Ox là trục trung hoà. Trên MCN chỉ có ứng suất pháp, không có ứng suất tiếp vì theo giả thuyết về MCN phẳng và với nhận xét các góc vuông sau khi biến dạng vẫn giữ nguyên, nghĩa là trên mặt cắt của phần tử hình hộp được tách ra như ở hình 6-7 không thể có ứng suất tiếp ($\tau = 0$).



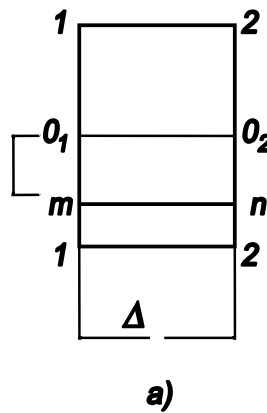
Hình 6-7

⇒ Xét đoạn dầm dz được cắt ra bởi hai mặt cắt 1-1 và 2-2.

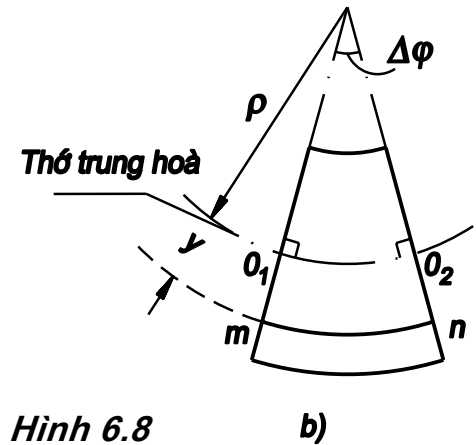
Vì trục trung hoà không bị biến dạng:

$$\overline{O_1O_2} = \Delta z \rightarrow \overline{O_1O_2} = \rho \cdot \Delta \varphi$$

⇒ Xét một thớ mn (hình 6.8): Trước khi biến dạng ta có:



a)



b)

Hình 6.8

$$mn = \Delta z = \rho \Delta \varphi .$$

Sau khi biến dạng, ta có: $mn = (\rho + y) \Delta \varphi$

⇒ Độ biến dạng dài tỷ đối của thớ mn bằng:

$$\varepsilon_z = \frac{(\rho + y) \Delta \varphi - \rho \Delta \varphi}{\rho \Delta \varphi} = \frac{y}{\rho} \quad (a)$$

2. Ứng suất trên MCN

⇒ Theo định luật Húc: $\sigma_z = E \varepsilon_z$ (b)

⇒ Thay (a) vào (b), ta được: $\sigma_z = E \frac{y}{\rho}$ (6-1)

⇒ Trên mọi MCN của uốn phẳng thuần túy thành phần lực dọc $N_z = 0$. Do đó ta có:

$$N_z = \int_F \sigma_z dF = 0 \Rightarrow N_z = \frac{E}{\rho} \int_F y dF = 0 \quad (c)$$

$$\Rightarrow \text{Đẳng thức trên được thoả mãn, khi: } \int_F y dF = S_x = 0 \quad (d)$$

trong đó S_x là mômen tĩnh của MCN đối với trục trung hoà.

\Rightarrow Vậy trục trung hoà là một trục trung tâm của MCN.

Ta có quan hệ giữa mômen uốn M_x và ứng suất pháp σ_z :

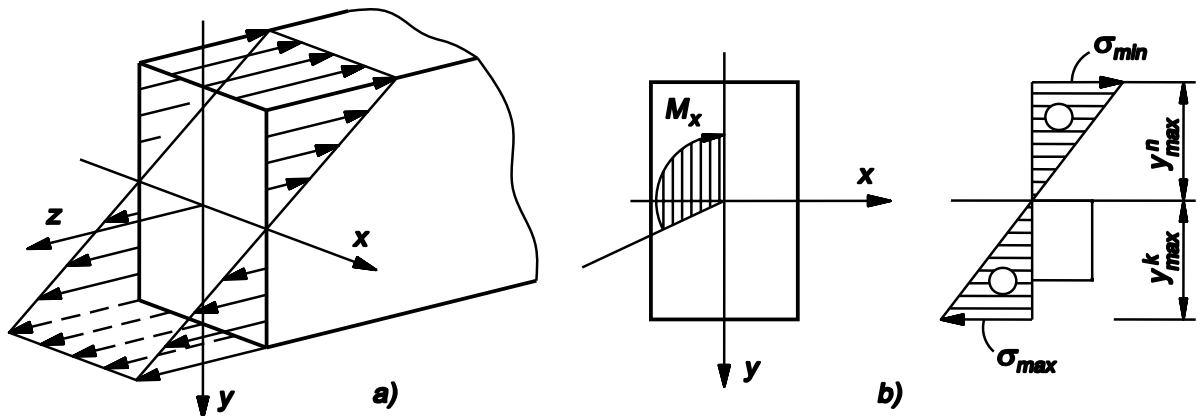
$$M_x = \int_F \sigma_z y dF = \frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF = \frac{E}{\rho} J_x \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E J_x}} \quad (6.2)$$

So sánh (6.1) và (6.2) ta suy ra công thức ứng suất pháp trên MCN:

$$\boxed{\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y} \quad (6.3)$$

3. Biểu đồ ứng suất pháp, ứng suất kéo và nén lớn nhất

\Rightarrow Tại một MCN bán kính ρ có trị số xác định, E là một hằng số. Vậy quy luật phân bố ứng suất pháp trên MCN là phẳng như trên hình 6.5a. Từ công thức (6.2) ta thấy ứng suất pháp là hàm bậc nhất theo y và không phụ thuộc vào x , do đó ta chỉ cần biểu diễn sự biến thiên của σ_z theo chiều cao của MCN (hình 6-9b). Giao tuyến của mặt phẳng ứng suất với MCN chính là trục trung hoà (đường trung hoà). Rõ ràng ứng suất pháp trên các đường thẳng song song với trục trung hoà có trị số như nhau. Do đó ta có thể vẽ biểu đồ phân bố ứng suất pháp như trên hình 6.9b.



Hình 6.9

$\Rightarrow \sigma_z$ có trị số tuyệt đối lớn nhất tại các điểm mép trên hay mép dưới.

\Rightarrow Ứng suất kéo và nén lớn nhất: ta xét hai dạng mặt cắt sau:

a) Nếu trục trung hoà là đối xứng chia đôi chiều cao của mặt cắt ngang, ví dụ MCN là hình chữ nhật, hình tròn, chữ I, ... ta có $y_{\max}^k = y_{\max}^n = y_{\max}$:

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \sigma_{z\max}^k; \quad \sigma_{\min} = \sigma_{z\max}^n \\ \sigma_{\max} &= -\sigma_{\min} = \frac{M_x}{J_x} y_{\max} = \frac{M_x}{W_x}\end{aligned}\quad (6.5)$$

trong đó: $W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}$ là mômen chống uốn của MCN, thứ nguyên (chiều dài)³.

b) MCN mà đường trung hoà không chia đều chiều cao (hình 6.10):

$$|\sigma_z^k|_{\max} \neq |\sigma_z^n|_{\max}$$

⇒ Kí hiệu khoảng cách hình học (giá trị tuyệt đối) từ điểm xa nhất tới trục trung hoà là y_{\max}^k và y_{\max}^n

⇒ Ứng suất kéo (nén) lớn nhất:

$$\sigma_{\max} = |\sigma_z^k|_{\max} = \frac{|M_x|}{J_x / y_{\max}^k} = \frac{|M_x|}{W_x^k} \quad (6.6)$$

$$\sigma_{\min} = -|\sigma_z^n|_{\max} = -\frac{|M_x|}{J_x / y_{\max}^n} = -\frac{|M_x|}{W_x^n} \quad (6.7)$$

trong đó, đại lượng: $W_x^k = \frac{J_x}{y_{\max}^k}$; $W_x^n = \frac{J_x}{y_{\max}^n}$ là mômen chống uốn khi kéo và khi nén của MCN đối với trục trung hoà.

⇒ Mômen chống uốn của vài hình đơn giản:

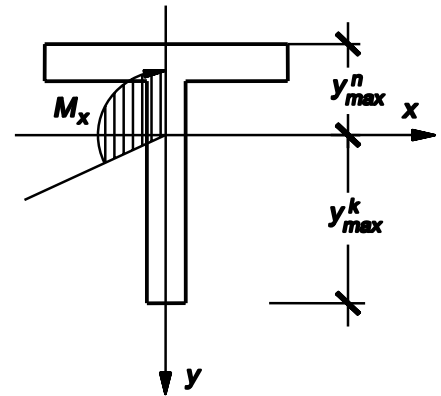
Hình chữ nhật: $W_x = \frac{J_x}{h/2} = \frac{2bh^3}{12h} = \frac{bh^2}{6},$

Hình tròn: $W_x = \frac{J_x}{d/2} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3;$

Hình vành khăn: $W_x = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \eta^4) \approx 0,1D^3 (1 - \eta^4); \quad \eta = \frac{d}{D}$

4. Điều kiện bền của dầm chịu uốn phẳng thuần túy

⇒ Dầm làm từ vật liệu dẻo, do khả năng chịu kéo và nén như nhau ($\sigma_{ch}^k = \sigma_{ch}^n$), nên $[\sigma]_k = [\sigma]_n = [\sigma]$.



Hình 6.10

Theo (6.5), ta có điều kiện bền: $\boxed{\max |\sigma_z| = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma]}$ (6.13)

\Rightarrow Dầm làm từ vật liệu giòn, vì $\sigma_{ch}^k \neq \sigma_{ch}^n \Rightarrow$ phải viết 2 điều kiện bền:

$$\max \sigma_z^k = \frac{M_x}{W_x^k} \leq [\sigma]_k \quad (6.14); \quad \left| \min \sigma_z^n \right| = \frac{M_x}{W_x^n} \leq [\sigma]_n \quad (6.15)$$

\Rightarrow Tìm vị trí MCN có ứng suất pháp lớn nhất. Nếu dầm có MCN không thay đổi và vật liệu của dầm là dẻo thì lấy ở MCN có mômen uốn lớn nhất. Trường hợp dầm có MCN thay đổi ta phải lấy MCN có ứng suất pháp lớn nhất. Trường hợp dầm làm bằng vật liệu giòn ta phải tìm MCN thoả mãn các biểu thức (6.14), (6.15) (kéo - nén).

5. Hình dạng hợp lý của MCN

Hình dạng hợp lý của MCN là hình dáng sao cho với cùng một tải trọng cho trước thì dầm cấu tạo tốn ít vật liệu nhất hoặc cùng khối lượng vật liệu, khả năng chịu lực của dầm là lớn nhất.

\Rightarrow Nếu dầm làm bằng vật liệu dẻo thì MCN phải đối xứng qua đường trung hoà, vì $[\sigma]_k = [\sigma]_n$ nên $y_{max}^k = y_{max}^n$.

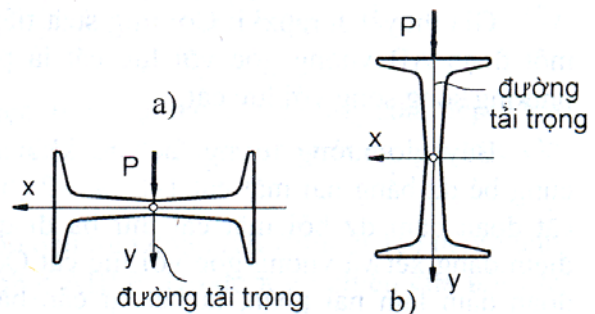
\Rightarrow Nếu dầm làm bằng vật liệu giòn thì MCN phải thoả mãn điều kiện:

$$\frac{|y_{max}^k|}{|y_{max}^n|} = \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n}$$

Đối với vật liệu giòn $[\sigma]_k < [\sigma]_n$ do đó $|y_{max}^k| < |y_{max}^n|$.

Như vậy đối với dầm làm bằng vật liệu giòn thì MCN hợp lý có dạng không đối xứng qua trục trung hoà, chẳng hạn MCN chữ T, hình tam giác, ...

\Rightarrow *Bố trí mặt cắt ngang*: Qua biểu đồ ứng suất pháp trên MCN của dầm chịu uốn như trên hình 6.9 ta thấy ở những điểm càng gần trục trung hoà thì ứng suất pháp càng nhỏ, nghĩa là tại những chỗ đó vật liệu chịu tải rất ít. Để tận dụng khả năng làm việc của vật liệu người ta thường bố trí MCN chữ T, I, ..., Ngoài ra việc bố trí định hướng mặt cắt đối với mặt phẳng tải trọng



Hình 6.11. Bố trí MCN
a) không hợp lý; b) hợp lý

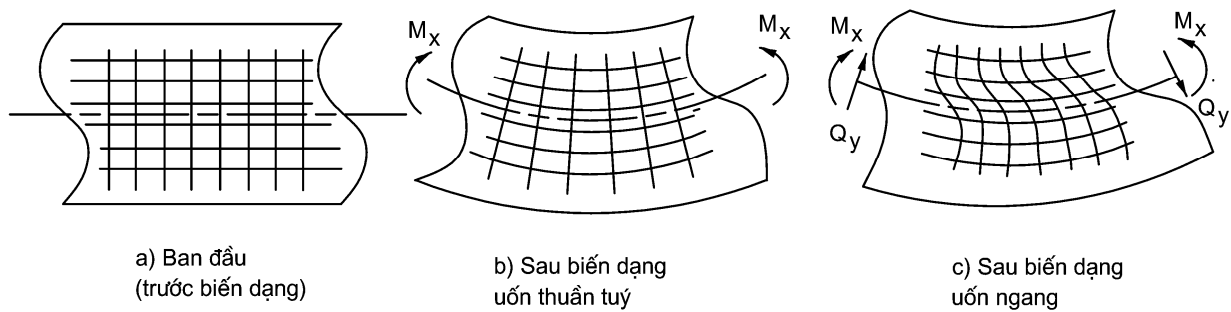
cũng có ý nghĩa rất lớn. Ví dụ MCN chữ I bố trí làm sao trục trung hòa trùng với một trục (x chẳng hạn) mà đối với trục đó $J_x = J_{\max}$ (hình 6.11).

⇒ Điều kiện dầm có **độ bền đều**: $|\sigma_{z\max}|^k = |\sigma_{z\max}|^n$

III. DẦM CHỊU UỐN NGANG PHẪNG

1. Định nghĩa

⇒ Dầm chịu uốn ngang phẳng khi trên MCN của dầm ngoài thành phần mômen uốn M còn có thành phần lực cắt Q . Các thành phần đó nằm trong mặt phẳng đối xứng của dầm.



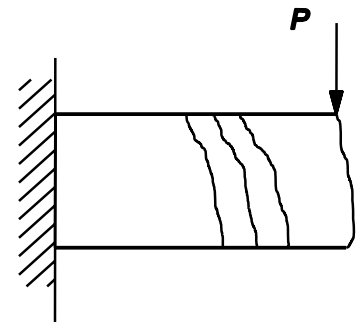
Hình 6.12

Với dầm chịu uốn ngang phẳng: thành phần ứng suất pháp do mômen uốn và ứng suất tiếp do lực cắt gây ra. Hình 6.12 mô tả hiện tượng uốn ngang (trục bị uốn cong), làm cho các MCN ban đầu không còn phẳng nữa mà bị vênh đi trong quá trình biến dạng. Điều này chứng tỏ trên MCN của dầm đã xuất hiện ứng suất tiếp.

1. Ứng suất pháp

Trong uốn phẳng, lực cắt ⇒ ứng suất tiếp. Các ứng suất tiếp phân bố theo chiều cao mặt cắt không đều. Do ảnh hưởng đó, các biến dạng góc cũng có trị số thay đổi theo chiều cao của MCN làm cho mặt cắt sau khi bị uốn không còn phẳng nữa mà hơi bị vênh theo chữ S (hình 6.13). Nếu lực cắt bằng hằng số thì MCN đều vênh như nhau ⇒ sự vênh không ảnh hưởng đến độ dẫn hoặc độ co ⇒ công thức tính ứng suất pháp (6.2) vẫn còn đúng

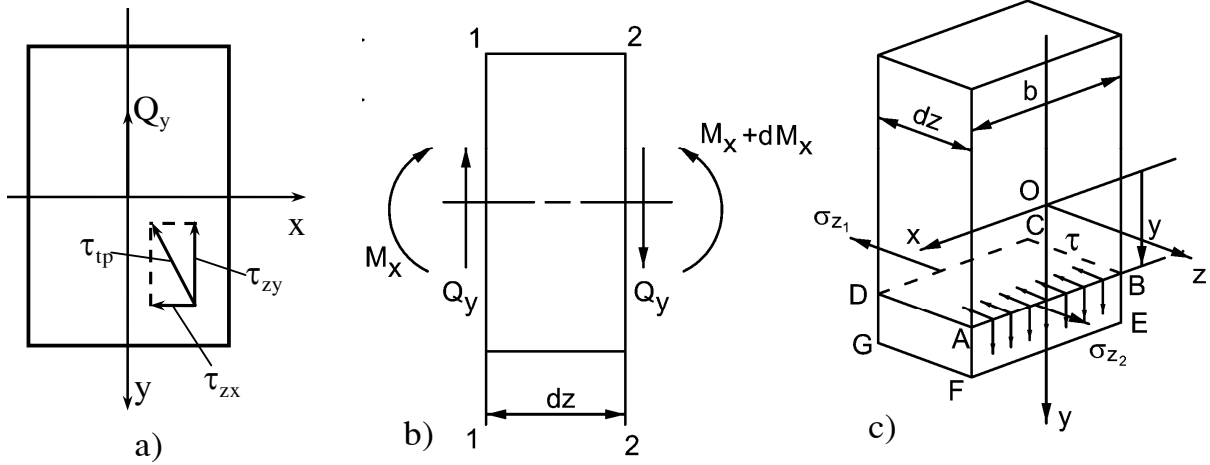
trong trường hợp uốn ngang phẳng: $\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y$.



Hình 6.13

2. Ứng suất tiếp

⇒ Xét MCN hình chữ nhật: ứng suất tiếp trên MCN là τ_{zx} và τ_{zy} (hình 6.14a). Theo định luật đối ứng ứng suất tiếp (mặt ngoài dầm không chịu ngoại lực theo phương z) ⇒ $\tau_{zx}=0$, có nghĩa tại điểm xét có $\tau = \tau_{zy}$.



Hình 6.14

Từ lý thuyết đàn hồi (giả thuyết Jurapxki) ta có: tất cả các ứng suất tiếp trên MCN đều // với lực cắt và ứng suất tiếp phân bố đều theo chiều rộng của MCN.

⇒ Tách từ dầm một đoạn có chiều dài dz (hình 6.14b, c), sau đó bằng mặt cắt ABCD song song và cách mặt phẳng Oxz một khoảng y chia đoạn thành hai phần và xét phần không chứa gốc O (ABCDEFGH).

⇒ Gọi σ_{z_1} và σ_{z_2} là ứng suất pháp trên các mặt cắt 1-1 và 2-2, $b^c = AB$ và F_c là diện tích của mặt cắt ABEF, b^c chiều rộng của phần diện tích đó tại điểm cách trục trung hoà y. Có thể thấy:

$$\sigma_{z_1} = \frac{M_x}{J_x} y; \quad \sigma_{z_2} = \frac{M_x + dM_x}{J_x} y \quad (a)$$

⇒ Xét sự cân bằng phần tử dưới, ta có:

$$\sum F_z = \int_{F_c} \sigma_{z_1} dF - \int_{F_c} \sigma_{z_2} dF + \tau_{yz} \cdot b^c \cdot dz = 0 \quad (b)$$

⇒ Thay (a) vào (b) và chú ý rằng $\frac{dM_x}{dz} = Q_y$, ta có:

$$\begin{aligned} \tau_{zy} = \tau_{yz} &= \int_{F_c} \frac{Q_y \cdot y}{J_x b^c} dF \\ \Rightarrow \tau_{zy} &= \frac{Q_y}{J_x b^c} \int_{F_c} y dF = \frac{Q_y \cdot S_x^c}{J_x b^c} \end{aligned} \quad (6.16)$$

trong đó $S_x^c(y)$ là mômen tĩnh của diện tích F_c đối với trục trung hoà x. Với mặt cắt là dải chữ nhật hẹp:

$$S_x^c = \xi F_c \quad (6.17)$$

ξ - toạ độ trọng tâm phần tiết diện bị cắt đối với trục trung hoà.

⇒ Công thức (6.16) được gọi là *công thức Juravski* (1855).

3. Ứng suất tiếp của một số mặt cắt đơn giản

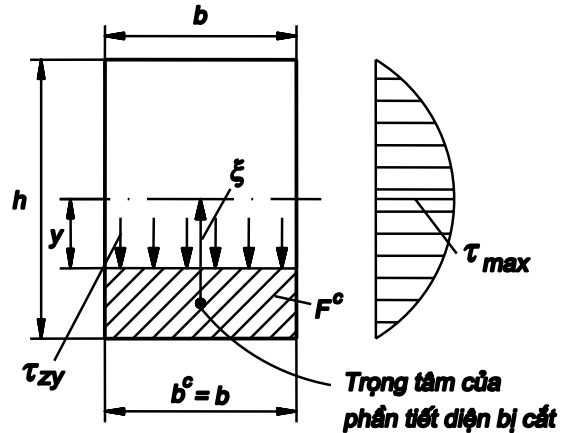
a) MCN hình chữ nhật (hình 6.15): Ta có:

$$S_x^c = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right); J_x = \frac{bh^3}{12}; b^c = b$$

$$\Rightarrow \tau_{zy} = \frac{3Q_y}{2bh} \left(1 - \frac{4y^2}{h} \right)$$

⇒ Biểu đồ phân bố ứng suất tiếp trên MCN (hình 6.15):

⇒ τ_{\max} tại các điểm trên trục trung hoà:



Hình 6.15

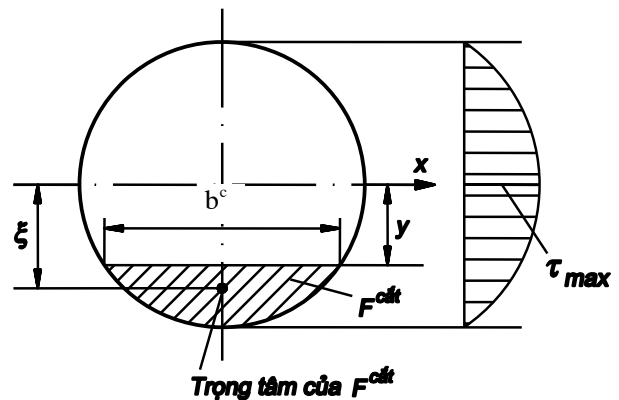
$$\tau_{\max} = \frac{3Q_y}{2bh} = \frac{3Q_y}{2F} \quad (6.18)$$

b) MCN hình tròn

$$J_x = \frac{\pi R^4}{4}; b^c = 2\sqrt{R^2 - y^2}; S_x^c = \frac{2}{3}(R^2 - y^2)^{3/2} \left\} \Rightarrow \tau_{zy} = \frac{4Q_y}{3\pi R^4}(R^2 - y^2)$$

⇒ Biểu đồ phân bố ứng suất tiếp trên MCN cho trên hình 6.16:

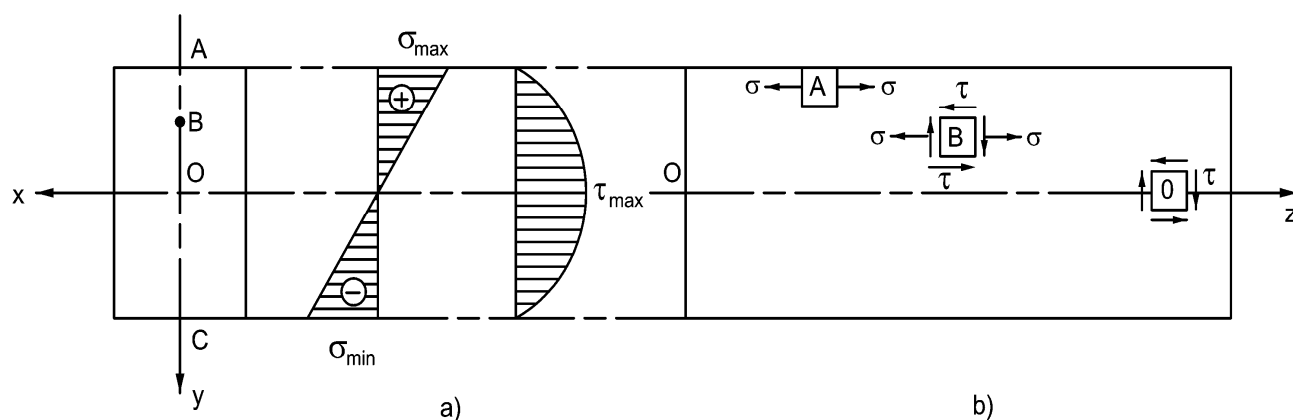
$$\tau_{\max} = \frac{4Q_y}{3\pi R^2} = \frac{4}{3} \frac{Q_y}{F} \quad (6.19)$$



Hình 6.16

4. Điều kiện bền của dầm chịu uốn ngang phẳng

⇒ Đối với dầm chịu uốn ngang phẳng, việc tìm vị trí điểm nguy hiểm và viết điều kiện bền có phức tạp hơn. Dựa vào biểu đồ phân bố ứng suất pháp và tiếp, dọc theo chiều cao ta thấy trên hình 6.18a.



Hình 6.18

- *Trạng thái ứng suất đơn ở các điểm ngoài mép xa trục trung hoà nhất*
- điểm A (C):

$$\Rightarrow \text{Điều kiện đối với vật dẻo: } \max |\sigma_z| = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma] \quad (6.20)$$

$$\Rightarrow \text{Vật liệu giòn: } \max \sigma_z^k = \frac{M_x}{W_x^k} \leq [\sigma]_k; \quad \max |\sigma_z^n| = \frac{M_x}{W_x^n} \leq [\sigma]_n \quad (6.21)$$

- *Trạng thái ứng suất trượt thuần túy ở những điểm trên trục trung hoà*
- điểm O (hình 6.18b):

$$\max \tau \leq [\tau] \quad (6.22)$$

- *Trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt: điểm nguy hiểm (điểm B) là những điểm nằm giữa trục trung hoà và mép ngoài cùng của MCN, nên điểm nguy hiểm trên mặt cắt phải chọn sao cho cả σ và τ cùng đồng thời lớn. Ví dụ MCN chữ I: điểm nguy hiểm là điểm tiếp giáp giữa lòng và đế*

Mặt cắt nguy hiểm: dựa vào biểu đồ lực cắt (Q_y) và mômen uốn (M_x), ta phải chọn một hoặc một số mặt cắt có M_x và Q_y cùng đồng thời lớn.

Điều kiện bền: đưa về ứng suất tương đương σ_{td} : $\max \sigma_{td} \leq [\sigma] \quad (6.23)$

\Rightarrow Ví dụ theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất, ứng suất tính toán tương đương tại điểm B, có dạng: $\sigma_{td(B)} = \sqrt{\sigma_{z(B)}^2 + 4\tau_{zy(B)}^2} \quad (6.24)$

5. Các dạng bài toán cơ bản:

\Rightarrow Bài toán kiểm tra bền: kiểm tra cả ba loại trạng thái ứng suất như trên.

\Rightarrow Xác định tải trọng cho phép.

⇒ Chọn kích thước của MCN

Trình tự khi chọn kích thước MCN hoặc xác định tải trọng cho phép: đầu tiên ta xuất phát từ điều kiện bền của phân tố ở trạng thái ứng suất đơn (điểm A hoặc C) theo công thức (6.20), (6.21) để chọn sơ bộ tải trọng hoặc kích thước MCN. Sau đó ta kiểm tra điều kiện bền đối với các phân tố còn lại (trượt thuần túy và trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt).

6. Điều kiện cứng của dầm chịu uốn phẳng

⇒ Khi chế tạo các bộ phận của công trình (cầu, dầm chịu lực của các toà nhà, ...) ⇒ cần kiểm tra xem biến dạng lớn nhất của kết cấu không được vượt quá giá trị cho phép được quy định bởi yêu cầu của thiết kế.

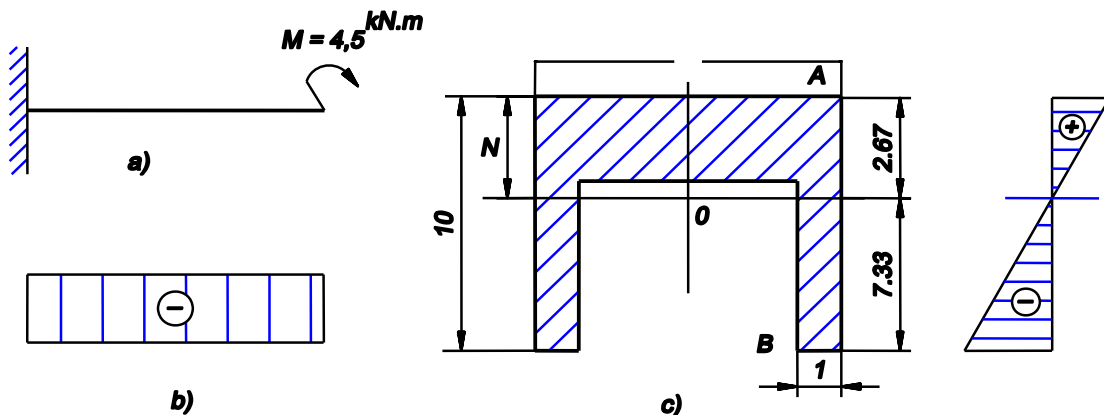
⇒ Biến dạng lớn nhất đó là: $\frac{y_{\max}}{l} \leq [f]; \quad \frac{\varphi_{\max}}{l} \leq [\theta]$

trong đó y_{\max} ; φ_{\max} là độ võng và góc xoay lớn nhất của dầm; l là chiều dài của dầm. $[f]$ là giá trị cho phép của độ võng trên một đơn vị dài. $[\theta]$ là giá trị cho phép của góc xoay trên một đơn vị dài.

7. Ví dụ áp dụng

Ví dụ 6.1: Một dầm bằng vật liệu có ứng suất pháp cho phép khi kéo $[\sigma]_k = 3,5 \text{ kN/cm}^2$ và nén $[\sigma]_n = 11 \text{ kN/cm}^2$, chịu lực như trên hình 6.19a.

Kiểm tra độ bền của dầm.



Hình 6.19

Bài giải: Trình tự các bước thực hiện

- Vẽ biểu đồ mômen uốn, cho trị số $\max M_x = 4,5 \text{ kN.m}$
- Tìm các đặc trưng cần thiết của MCN (hình 6.19c), ta được các trị số:

$$J_x = 370 \text{ cm}^4; \quad y_{\max}^k = 2,67 \text{ cm}; \quad y_{\max}^n = 7,33 \text{ cm}$$

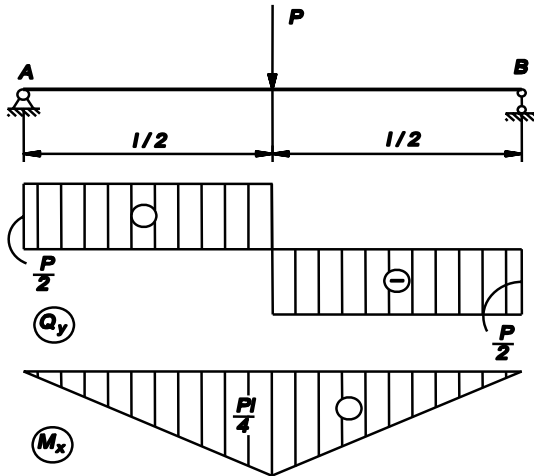
- Tính các giá trị $\max \sigma_z^k; \max \sigma_z^n$:

$$\max \sigma_z^k = \sigma_A = \frac{M_x}{J_x} y_{\max}^k = 3,25 \text{ kN/cm}^2 \leq [\sigma]_k;$$

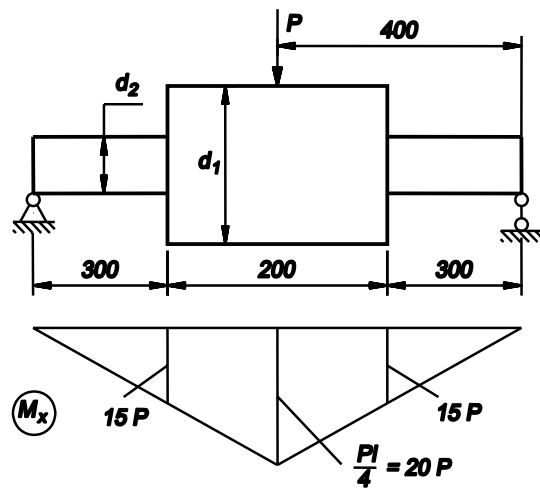
$$\max \sigma_z^n = \sigma_B = \frac{M_x}{J_x} y_{\max}^n = 8,92 \text{ kN/cm}^2 \leq [\sigma]_n$$

Vậy dầm đủ bền.

Ví dụ 6.2: Cho dầm chịu lực như trên hình 6.20. Chọn đường kính của dầm cho hai trường hợp: dầm có MCN không đổi, dầm có ba bậc như hình 6.21. Biết $l=80 \text{ cm}$, $P=5 \text{ kN}$, $[\sigma]=16 \text{ kN/cm}^2$, $[\tau]=8 \text{ kN/cm}^2$ (Bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt).



Hình 6.20



Hình 6.21

Bài giải

- Dầm có MCN không đổi. Theo điều kiện bền cơ bản (6.13), ta có:

$$0,1d^3 \geq M_{x\max} / [\sigma]$$

trong đó: $M_{x\max} = 5.80 / 4 = 10^2 \text{ kN.cm} \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{10^2 / (0,1.16)} = 4 \text{ cm}$

- Dầm ba bậc (hình 6.21). Trị số d_1, d_2 được xác định theo công thức (6.20)

Đối với đoạn giữa: $\max M_x = 10^2 \text{ kNcm}$

Đối với đoạn hai đầu: $M_x = 30.P / 2 = 30.5 / 2 = 75 \text{ kNcm}$

Từ điều kiện bền cơ bản (6.13), ta có:

$$0,1d_1^3 \geq \frac{10^2}{16} \rightarrow d_1 = 4 \text{ cm}; \quad 0,1d_2^3 \geq \frac{75}{16} \rightarrow d_2 = 3,6 \text{ cm}$$

Với kích thước đã chọn dầm làm việc đủ bền.

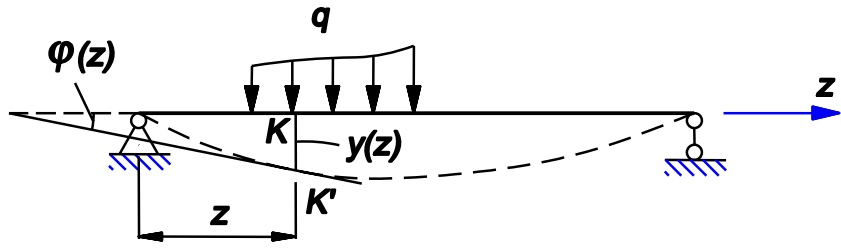
IV. CHUYỂN VỊ CỦA DẦM CHỊU UỐN

1. Đường đàn hồi, độ võng và góc xoay

⇒ Khi dầm chịu uốn phẳng, trục của dầm bị uốn cong gọi là *đường đàn hồi* (hình 6.22).

⇒ Chuyển vị đứng của MCN tại K gọi là **độ võng** $y(z)$ của dầm.

⇒ Góc lập bởi tiếp tuyến với đường đàn hồi tại điểm K' và trục của dầm trước khi biến dạng gọi là **góc xoay** $\varphi(z)$.



Hình 6.22

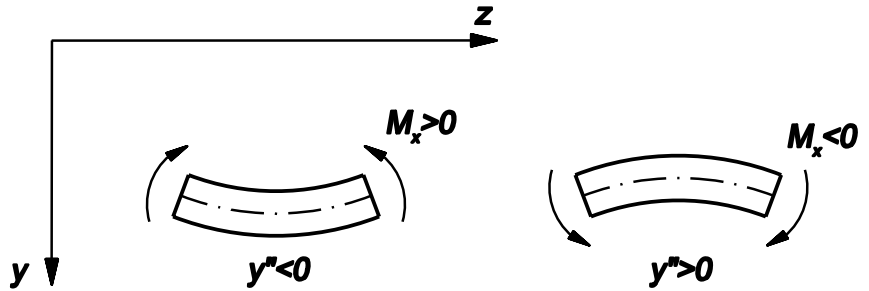
2. Phương trình vi phân gần đúng của đường đàn hồi

⇒ Từ (6.2) ta có bán kính cong ρ của đường đàn hồi được xác định bởi công thức:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x} \quad (a)$$

⇒ Mặt khác ta có:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \quad (b)$$



Hình 6.23

⇒ Từ (a) và (b) suy ra:
$$y''(z) = -\frac{M_x}{EJ_x} \quad (6.28)$$

⇒ Dấu “-” do mô men uốn ($y'^2 \approx 0$ do biến dạng là vô cùng bé) và độ lồi (lõm) của dầm là trái dấu nhau (hình 6.23).

3. Phương pháp tích phân không định hạn

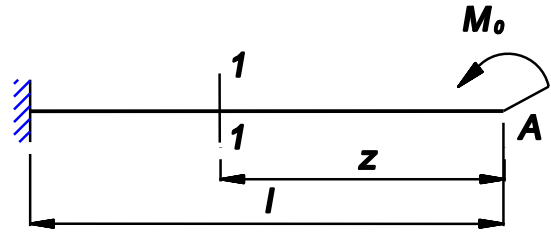
⇒ Muốn tính góc xoay và độ võng tại mặt cắt bất kỳ của dầm, ta lần lượt tích phân phương trình (6.28) hai lần:

$$y'(z) = \varphi(z) = -\int \frac{M_x}{EJ_x} dz + C_1 \quad (6.29)$$

$$y(z) = -\int \left(\int \frac{M_x}{EJ_x} dz \right) dz + C_1 z + C_2 \quad (6.30)$$

⇒ Các hằng số tích phân C_1 và C_2 xác định từ các điều kiện biên tại các mặt cắt đặt liên kết và điều kiện liên tục của độ võng và góc xoay tại vị trí tiếp giáp giữa các đoạn dầm.

Ví dụ 6.3: Xét dầm công-xôn chịu mômen uốn M_0 tại đầu tự do (hình 6.24), biết độ cứng của dầm $EJ_x = \text{const}$. Tính độ võng và góc xoay tại điểm A.



Hình 6.24

Bài giải:

Xét mặt cắt 1-1, ta có: $M_x = M_0$

Thay vào (6.28) và tích phân lần lượt hai lần ta được:

$$y'' = -\frac{M_0}{EJ_x}; \quad y' = -\frac{M_0}{EJ_x}z + C_1; \quad y = -\frac{M_0}{2EJ_x}z^2 + C_1z + C_2$$

$$\text{Điều kiện biên: } z = l: \begin{cases} y(l) = 0 \\ y'(l) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{M_0 l}{EJ_x} \\ C_2 = -\frac{M_0 l^2}{2EJ_x} \end{cases}$$

$$\text{Vậy độ võng, góc xoay tại A là: } y(0) = -\frac{M_0 l^2}{2EJ_x}; \quad \varphi_A = y'(0) = \frac{M_0 l}{EJ_x}$$

Dấu “-” chứng tỏ điểm A chuyển vị lên trên, ngược chiều dương của trục y. Góc xoay tại A quay ngược chiều kim đồng hồ.

3. Phương pháp hàm gián đoạn

⇒ Phương pháp hàm gián đoạn cho phép biểu diễn mômen uốn thành biểu thức duy nhất trên toàn chiều dài của dầm, và chỉ có 2 hằng số tích phân xác định từ điều kiện biên ⇒ việc tính toán độ võng góc xoay tại mặt cắt bất kỳ trên toàn dầm được đơn giản hoá rất nhiều.

⇒ Hàm gián đoạn được định nghĩa như sau:

$$\langle x - a \rangle^n = \begin{cases} (x - a)^n & \text{khi } x \geq a \\ 0 & \text{khi } x < a \end{cases} \quad \text{với } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n \geq 0, a = \text{const} \in \mathbb{R}.$$

⇒ Có nghĩa là hàm gián đoạn chỉ có giá trị khác 0 khi đối số là không âm. Khi đó các dấu ngoặc nhọn có thể coi như dấu ngoặc tròn thông thường. Còn khi đối số âm thì hàm gián đoạn bằng 0.

⇒ Từ định nghĩa hàm gián đoạn ta có tính chất sau:

$$\frac{d}{dx} \langle x - a \rangle^n = n \cdot \langle x - a \rangle^{n-1}; \quad \int \langle x - a \rangle^n dx = \frac{\langle x - a \rangle^{n+1}}{n+1} + C$$

⇒ Sử dụng hàm gián đoạn ta có thể biểu diễn mômen uốn của dầm đối với các loại tải trọng khác nhau:

a) Mô men tập trung

$$M_x = -M_0 \cdot \langle z - a \rangle^0$$

Dấu “-” vì mô men uốn làm căng thớ trên.

b) Lực tập trung

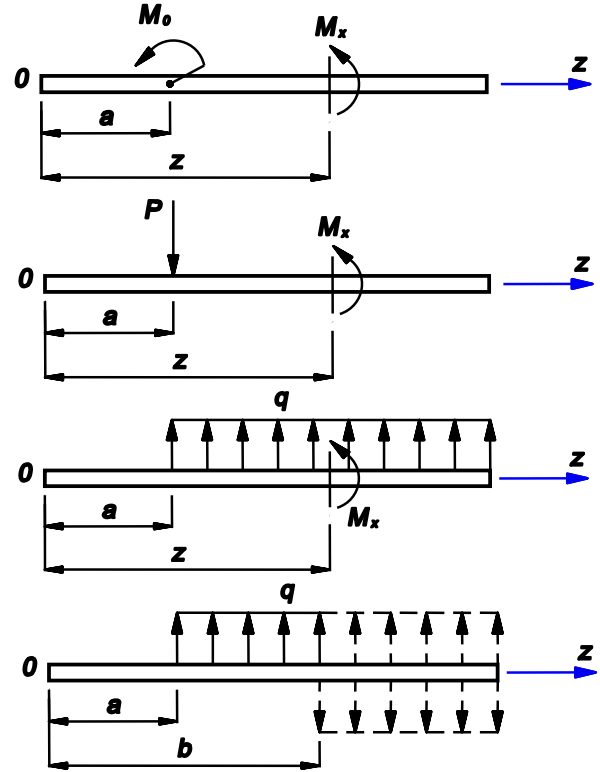
$$M_x = -P \cdot \langle z - a \rangle^1$$

c) Lực phân bố đều đến hết chiều dài dầm:

$$M_x = \frac{q \cdot \langle z - a \rangle^2}{2}$$

d) Lực phân bố đều trên một đoạn của dầm

$$M_x = \frac{q \cdot \langle z - a \rangle^2}{2} - \frac{q \cdot \langle z - b \rangle^2}{2}$$



⇒ Áp dụng nguyên lý cộng tác tác dụng ta sẽ viết được biểu thức mômen uốn cho dầm với tác dụng đồng thời của nhiều tải trọng khác nhau. Thay biểu thức của M_x vào (6.28) vào tích phân lần lượt hai lần giống như phương pháp tích phân không định hạn ta sẽ thu được độ võng, góc xoay tại mặt cắt bất kỳ. Hai hằng số tích phân được xác định từ các điều kiện liên kết của dầm.

Ví dụ 6.4: Tính độ võng, góc xoay tại điểm giữa của dầm.

Từ hình 6.25, ta có:

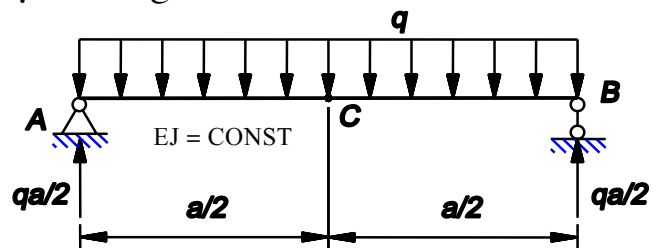
$$M_x = \frac{q \cdot a}{2} \langle z - 0 \rangle^1 - \frac{q}{2} \langle z - 0 \rangle^2$$

$$EJ_x \cdot y'' = -\frac{q \cdot a}{2} \langle z - 0 \rangle^1 + \frac{q}{2} \langle z - 0 \rangle^2$$

$$EJ_x \cdot y' = -\frac{q \cdot a}{4} \langle z - 0 \rangle^2 + \frac{q}{6} \langle z - 0 \rangle^3 + C_1$$

$$EJ_x \cdot y = -\frac{q \cdot a}{12} \langle z - 0 \rangle^3 + \frac{q}{24} \langle z - 0 \rangle^4 + C_1 \cdot z + C_2$$

$$\text{Điều kiện biên: } \begin{cases} z=0: y(0)=0 \\ z=a: y(a)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{qa^3}{24} \\ C_2 = 0 \end{cases}$$



Hình 6.25

Vậy độ võng và góc xoay tại C:

$$y_C = y\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{5qa^4}{384EJ_x}; \quad \varphi_C = y'\left(\frac{a}{2}\right) = 0$$

4. Phương pháp tải trọng giả tạo (phương pháp đồ toán)

⇒ Liên hệ vi phân giữa nội lực và ngoại lực như sau:

$$\frac{d^2 M_x(z)}{dz^2} = \frac{dQ_y(z)}{dz} = q(z)$$

⇒ Còn phương trình vi phân đường đàn hồi có dạng như sau:

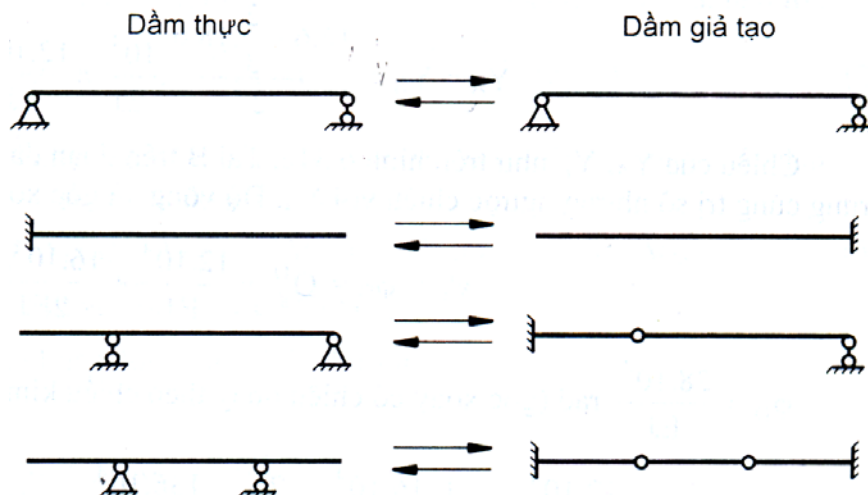
$$\frac{d^2 y}{dz^2} = -\frac{M_x}{EJ_x} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{dy'}{dz} = -\frac{M_x}{EJ_x}$$

⇒ Ta thấy có sự tương đương nhau, vì vậy nếu tạo ra một tải trọng giả tạo $q_{gt} = -\frac{M_x}{EJ_x}$, bằng PP mặt cắt xác định được Q_{gt} và M_{gt} trên dầm giả

tạo ⇒ đó chính là độ võng và góc xoay trên dầm thực tương ứng.

⇒ Điều kiện liên kết của dầm giả tạo và dầm thực phải có mối tương quan sao cho giá trị Q_{gt} và M_{gt} trên dầm giả tạo phải đúng bằng giá trị độ võng và góc xoay trên dầm thực tương ứng (bảng 6.1).

Bảng 6.1. Dầm thực và dầm giả tạo tương ứng



⇒ Trình tự giải bài toán bằng phương pháp tải trọng giả tạo :

- Vẽ biểu đồ mômen uốn M_x cho trên dầm thực.
- Vẽ dầm giả tạo với các liên kết phù hợp với điều kiện độ võng, góc xoay tương ứng trên dầm thực

- Đặt biểu đồ M_x lên dầm giả tạo, nhưng chú ý là tung độ bằng M_x/EJ_x , chiều mũi tên của tải trọng giả tạo hướng về phía thõng căng của dầm thực (do đó thoả mãn $q_{gt} = -\frac{M_x}{EJ_x}$)

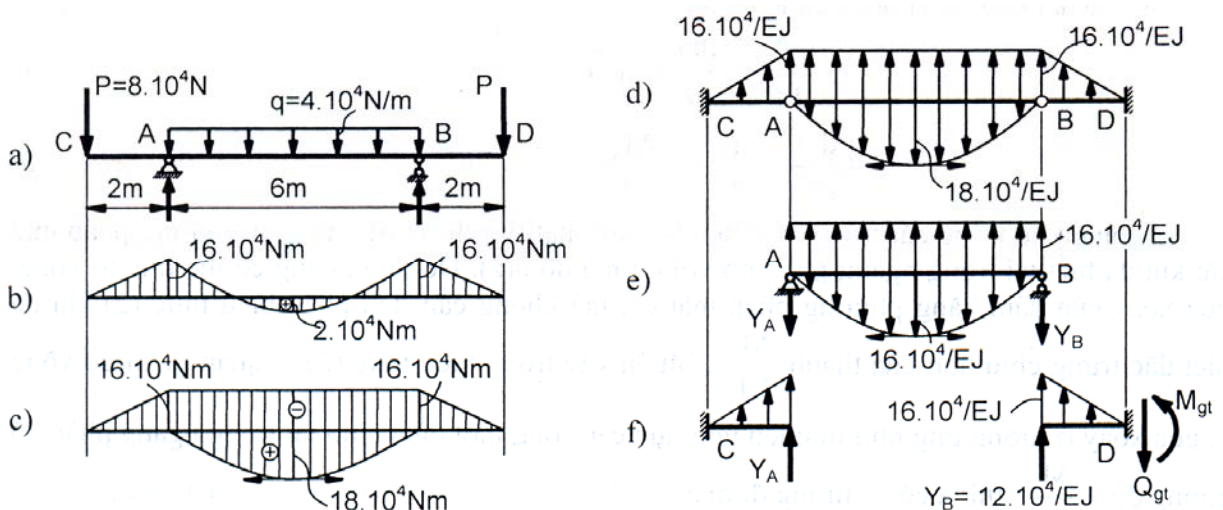
- Xác định Q_{gt} và $M_{gt} \Rightarrow$ độ võng và góc xoay của dầm thực.

\Rightarrow Để tiện lợi trong quá trình tính toán sau này, chúng ta xác định trước diện tích và hoành độ trọng tâm của một số biểu đồ (bảng 6.2).

Bảng 6.2 - diện tích và hoành độ trọng tâm của một số hình

	<p>Bậc 2: $\Omega = \frac{1}{3}hl$; $z_1 = \frac{1}{4}l$ $z_2 = \frac{3}{4}l$</p> <p>Bậc n: $\Omega = \frac{1}{n+1}hl$; $z_1 = \frac{1}{n+2}l$; $z_2 = \frac{n+1}{n+2}l$</p>
	<p>Bậc 2: $\Omega = \frac{2}{3}hl$; $z_1 = \frac{3}{8}l$ $z_2 = \frac{5}{8}l$</p> <p>Bậc n: $\Omega = \frac{n}{n+1}hl$; $z_1 = \frac{n+1}{3n+2}l$; $z_2 = \frac{3n+1}{n+2}l$</p>

Ví dụ 6.5: Xác định độ võng và góc xoay tại đầu mút D của dầm chịu lực như hình 6.25a. Biết độ cứng $EJ = \text{const}$.



Hình 6.26

Giải: Biểu đồ mômen uốn M_x của dầm được vẽ trên hình 6.26b và được phân tích như hình 6.26c. Dầm và lực phân bố giả tạo được vẽ ở hình 6.26d. Ta chia dầm đơn giản như ở hình 6.26e và 6.26f.

Phản lực tại A và B của dầm giữa là :

$$Y_A = Y_B = \frac{16.6 - \frac{2}{3} \cdot 18.6}{2} \cdot \frac{10^4}{EJ_x} = \frac{12 \cdot 10^2}{EJ_x}$$

Chiều của Y_A, Y_B như trên hình 6.26e. Tại B trên đoạn dầm BD chịu một lực giả tạo tập trung cùng trị số nhưng ngược chiều với Y_B . Độ võng và góc xoay tại D:

$$y'_D = \varphi_D = Q_{gt}^D = \frac{12 \cdot 10^4}{EJ_x} + \frac{16 \cdot 10^4 \cdot 2}{2EJ_x} = \frac{28 \cdot 10^4}{EJ_x} \text{ (rad)}$$

$$y_D = M_{gt}^D = \frac{12 \cdot 10^4}{EJ_x} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{16 \cdot 10^4}{EJ_x} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{136 \cdot 10^4}{3EJ} \text{ (m)}$$

V. BÀI TOÁN SIÊU TĨNH

⇒ Cũng như trong các bài toán về kéo, nén và xoắn, ở đây ta cũng gặp những bài toán siêu tĩnh về uốn ⇒ cần phải thiết lập thêm phương trình biến dạng

⇒ Ví dụ, cho dầm chịu lực như hình 6.27. Siêu tĩnh bậc 1.

⇒ Dựa vào điều kiện độ võng tại B của dầm bằng 0 để lập phương trình biến dạng:

$$y_B = 0$$

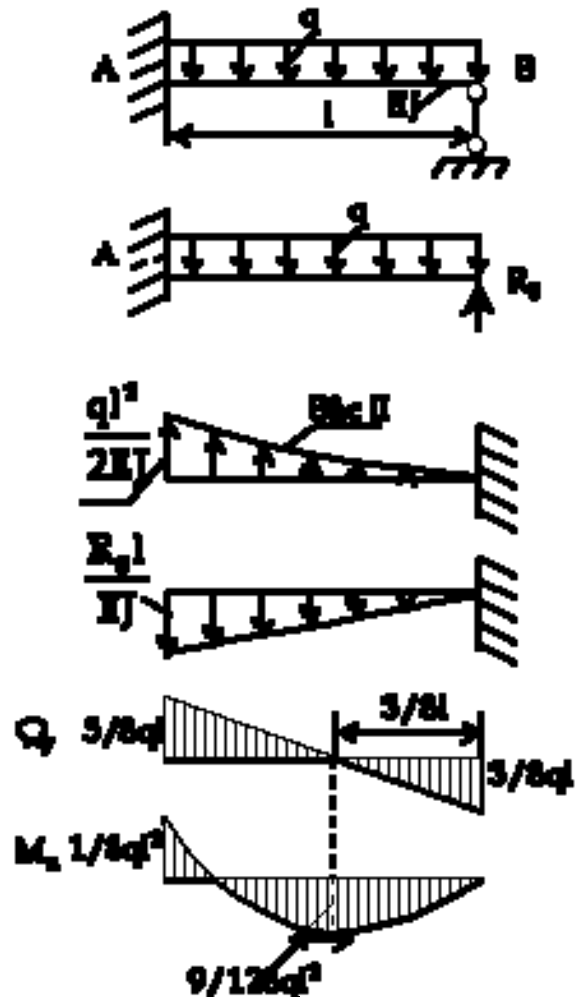
⇒ Dựa vào phương pháp đồ toán ta chọn dầm giả tạo và tải trọng phân bố giả tạo như hình 6.27. Mômen giả tạo tại B do tải trọng q_{gt} gây nên là:

$$M_{gt} = \frac{1}{3} \frac{ql^2}{2EJ} \cdot l \cdot \frac{3}{4} l - \frac{1}{2} \cdot \frac{R_B l}{EJ} \cdot l \cdot \frac{2}{3} l$$

⇒ Trị số của mômen giả tạo đó chính là độ võng tại B. Với điều kiện độ võng bằng không ta có phương

$$\text{trình: } \frac{ql^4}{8EJ} - \frac{R_B l^3}{3EJ} = 0 \Rightarrow R_B = \frac{3}{8} ql$$

⇒ Khi đã có R_B ta dễ dàng vẽ được biểu đồ nội lực của dầm



Hình 6.27

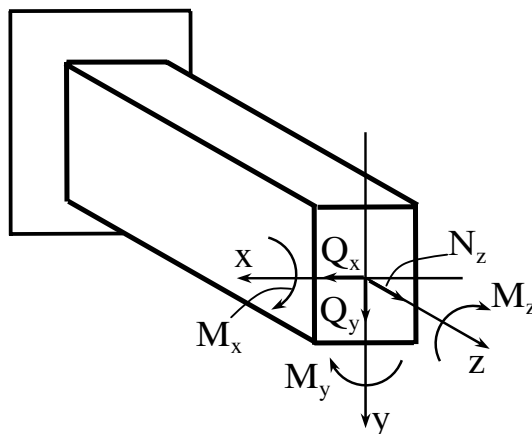
Chương 7. THANH CHỊU LỰC PHỨC TẠP

I. KHÁI NIỆM

⇒ Khi trên MCN của thanh xuất hiện từ hai thành phần nội lực trở lên thì gọi là *thanh chịu lực phức tạp*. Ví dụ, một trục truyền vừa chịu xoắn vừa chịu uốn, ...

⇒ Tổng quát nhất khi thanh chịu lực phức tạp, nội lực trên MCN có thể có 6 thành phần (hình 7.1).

⇒ **Phương pháp tính:** áp dụng nguyên lý cộng tác dụng: ứng suất hay biến dạng do nhiều yếu tố (ngoại lực, nhiệt độ, độ lún của gối tựa, ...) gây ra đồng thời trên một thanh thì bằng tổng ứng suất hay biến dạng do từng yếu tố gây ra trên thanh đó.

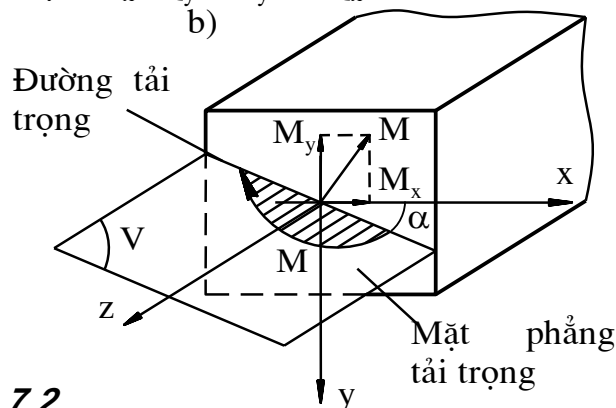
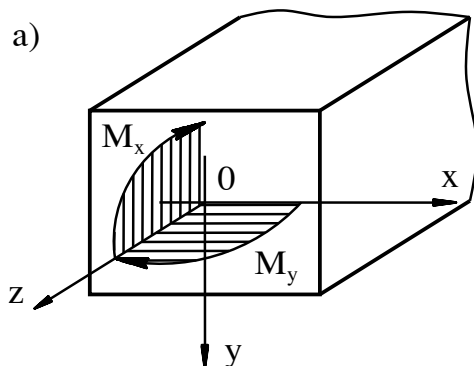


Hình 7.1

II. UỐN XIÊN

1. Định nghĩa

⇒ Khi trên mọi MCN chỉ có hai thành phần nội lực là M_x và M_y nằm trong các mặt phẳng quán tính chính trung tâm của MCN (hình 7.2). Khi chú ý đến lực cắt trên MCN có thể có các thành phần nội lực M_x , Q_y , M_y và Q_x .



Hình 7.2

⇒ Gọi M là vectơ tổng của các vectơ M_x và M_y , nằm trong mặt phẳng V chứa trục z , nhưng không trùng với một mặt phẳng quán tính chính trung tâm nào. Giao tuyến của mặt phẳng này với mặt phẳng cắt ngang gọi là *đường tải trọng*. Phân M thành 2 thành phần:

$$M_x = M \sin \alpha; M_y = M \cos \alpha$$

⇒ Trong uốn xiên đường tải trọng đi qua trọng tâm nhưng không trùng với một trục quán tính trung tâm nào (hình 7.2b).

Để tiện cho tính toán ta quy ước dấu cho các thành phần nội lực sau: Mômen uốn M_x, M_y mang dấu dương nếu nó làm căng về phía chiều dương của trục y, x (hay gây ra ứng suất kéo ở miền có tung độ y, x dương) và ngược lại sẽ mang dấu âm.

2. Ứng suất pháp trên MCN

⇒ Theo nguyên lý cộng tác dụng, ứng suất pháp tại một điểm bất kì trên MCN có toạ độ x, y được tính theo công thức:
$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x \quad (7.1)$$

⇒ M_x, M_y coi là dương khi làm căng phần chiều dương của trục y, x .

⇒ Trong kĩ thuật người ta dùng công thức sau để không cần chú ý đến dấu của M_x, M_y và toạ độ x, y :
$$\sigma_z = \pm \frac{|M_x|}{J_x} |y| \pm \frac{|M_y|}{J_y} |x| \quad (7.2)$$

⇒ Ta sẽ chọn dấu “+” hoặc dấu “-” trước mỗi số hạng tùy theo các mômen uốn M_x và M_y gây ra ứng suất kéo hay nén ở điểm đang xét.

⇒ Nếu gọi α là góc của đường tải trọng hợp với trục x (hình 7.2b):

$$\operatorname{tg} \alpha = M_x / M_y \Rightarrow M_x = M \sin \alpha; \quad M_y = M \cos \alpha$$

⇒ Góc α được gọi là dương khi quay từ chiều dương trục x đến đường tải trọng theo chiều kim đồng hồ.

3. Phương trình đường trung hoà

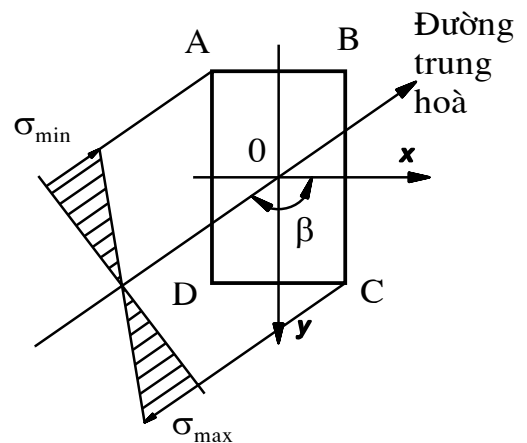
⇒ Từ (7.1) ta thấy phương trình đường trung hoà:

$$\frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x = 0 \quad (7.3) \quad \text{hay} \quad y = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_x}{J_y} \cdot x = x \cdot \operatorname{tg} \beta \quad (7.4)$$

trong đó
$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{M_y J_x}{M_x J_y} \quad \text{hay} \quad \operatorname{tg} \beta = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{J_x}{J_y} \quad (7.5)$$

⇒ Đường trung hoà là một đường thẳng đi qua trọng tâm của MCN và không vuông góc với đường tải trọng như trong uốn phẳng.

⇒ Từ biểu thức (7.5) ⇒ đối với các MCN có vô số hệ trục quán tính chính trung tâm như hình tròn, các đa giác đều cạnh, ... ($J_x = J_y$ nên $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = -1$) thì không xảy ra hiện tượng uốn xiên phẳng. Vì đường tải trọng sẽ \equiv với một trục quán tính chính trung tâm, còn đường trung hoà sẽ trùng với một trục quán tính chính trung tâm thứ hai vuông góc với đường tải trọng. Bài toán khi đó chỉ là uốn phẳng.



Hình 7.3

4. Biểu đồ ứng suất pháp trên MCN

⇒ Theo (7.1) mặt ứng suất là mặt phẳng, nên ứng suất pháp phân bố đều trên đường thẳng song song với đường trung hoà. Do đó ta có thể vẽ biểu đồ phân bố ứng suất pháp trên MCN trong hệ toạ độ như hình 7.3. Trục tung là đường trung hoà, trục hoành vuông góc với đường trung hoà.

5. Điều kiện bền

⇒ Điểm nguy hiểm là các điểm xa đường trung hoà nhất về phía kéo hoặc nén ⇒ trạng thái ứng suất của điểm nguy hiểm là trạng thái ứng suất đơn. MCN nguy hiểm được biết dựa vào biểu đồ M_x và M_y lựa chọn mặt cắt khi có cả M_x và M_y cùng đồng thời lớn.

⇒ Điều kiện bền có dạng:

- Đối với vật liệu dẻo: $|\sigma|_{\max} \leq [\sigma]$ (7.6)

- Đối với vật liệu giòn: $|\sigma|_{\max} \leq [\sigma]_k$ (7.7) $|\sigma|_{\min} \leq [\sigma]_n$ (7.8)

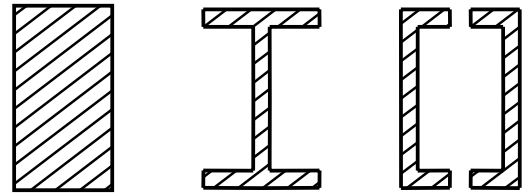
$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|}{J_x} |y_k| + \frac{|M_y|}{J_y} |x_k|; \quad \sigma_{\min} = - \left[\frac{|M_x|}{J_x} |y_n| + \frac{|M_y|}{J_y} |x_n| \right] \quad (7.9)$$

⇒ Nếu MCN của thanh là hình chữ nhật hoặc những mặt cắt có hai trục đối xứng như hình hình 7.4:

$$|x_k| = |x_n| = x_{\max} \Rightarrow |y_k| = |y_n| = y_{\max}$$

$$\sigma_{\max} = |\sigma_{\min}|; \quad \sigma_{\max} = \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \quad (7.10)$$

trong đó: $W_x = \frac{J_x}{|y_{\max}|}; \quad W_y = \frac{J_y}{|x_{\max}|} \quad (7.11)$



Hình 7.4

⇒ Trường hợp này điều kiện bền sẽ là:

- Vật liệu dẻo: $\frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \leq [\sigma]$ (7.12); Vật liệu giòn: $\frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \leq [\sigma]_k$ (7.13)

⇒ Từ điều kiện bền trên ta suy ra ba bài toán cơ bản sau:

- Kiểm tra bền theo (7.6) hoặc (7.7) hoặc (7.8).

- Tìm tải trọng cho phép. Gọi $[P_i]$ là tải trọng suy rộng cho phép, ta có:

$$M_x = k_1 [P_i]; \quad M_y = k_2 [P_i] \quad (7.14)$$

k_1, k_2 là các hằng số. Từ điều kiện bền, ví dụ theo (7.12) ta suy ra:

$$\frac{k_1 [P_i]}{W_x} + \frac{k_2 [P_i]}{W_y} \leq [\sigma] \quad \text{hay} \quad [P_i] \leq [\sigma] / \left(\frac{k_1}{W_x} + \frac{k_2}{W_y} \right) \quad (7.15)$$

- Chọn kích thước MCN

⇒ Vì chưa biết trị số $J_x, J_y, x_k, x_n, y_k, y_n \Rightarrow$ ta có thể chọn thử tính theo uốn phẳng do thành phần mômen đòi hỏi kích thước lớn, rồi thử dần.

⇒ Đối với các mặt cắt (hình 7.4), đầu tiên ta có thể tính theo công thức:

$$W_x \geq \frac{M_x + CM_y}{[\sigma]} \text{ với } C = \frac{W_x}{W_y} \quad (7.16)$$

⇒ Đối với hình chữ nhật có chiều cao h và bề rộng b thì $C = h/b$. Đối với mặt cắt hình chữ I lúc đầu có thể lấy $C = 8$, và hình chữ U lấy $C = 6$, sau đó kiểm tra tính toán lại.

Ví dụ 7.1: Cho dầm chịu lực như hình 7.5. Xác định số hiệu mặt cắt dầm thép chữ I, vị trí đường trung hoà. Cho $P = 2400\text{N}$; $q = 4000\text{N/m}$; $l = 2\text{m}$; $\alpha = 30^\circ$; $[\sigma] = 16000\text{N/m}^2$.

Bài giải: Mặt cắt nguy hiểm tại ngàm có:

$$M_x = \frac{ql^2}{2} + Pl \cos \alpha = 12160 \text{ Nm}$$

$$M_y = Pl \sin \alpha = 2400 \text{ Nm}$$

Thử lần thứ nhất ta lấy $C = 8$.

Theo công thức (7.39):

$$W_x \geq \frac{M_x + CM_y}{[\sigma]} = 196 \text{ cm}^3$$

Ta chọn mặt cắt chữ I số 20 có các giá trị nhỏ hơn và gần nhất $W_x = 184 \text{ cm}^3$; $W_y = 23,1 \text{ cm}^3$.

Thử lại: $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = 17000 \text{ N/cm}^2$$

$$\text{Vì } \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} 100 = \frac{17000 - 16000}{16000} 100 = 6,2\% > 5\%$$

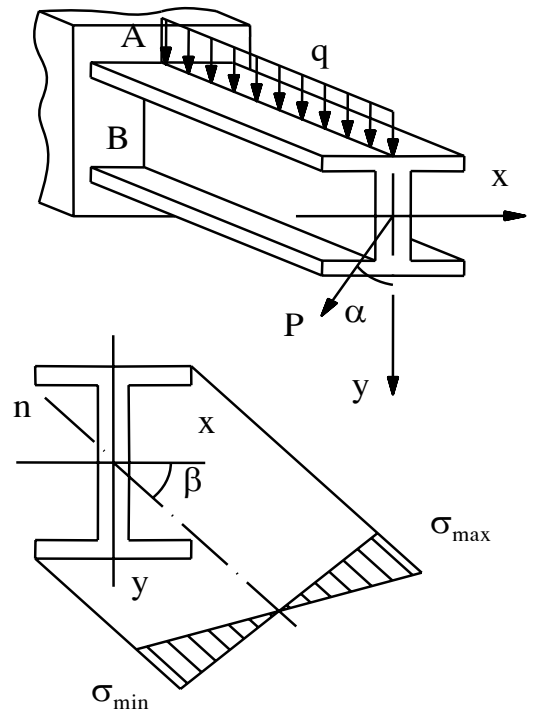
Do đó ta lấy mặt cắt số 20a có $W_x = 203 \text{ cm}^3$, $W_y = 28,2 \text{ cm}^3$

Khi đó:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{1216000}{203} + \frac{240000}{28,2} = 14500 \text{ N/cm}^2$$

Ứng suất nhỏ hơn:

$$\frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} 100 = \frac{14500 - 16000}{16000} 100 = -9,4\%$$



Hình 7.5

Vì giữa thép có số hiệu 20 và 20a không còn số hiệu nào khác nên ta chọn dầm thép có số hiệu 20a.

Xác định vị trí đường trung hoà. Tra bảng với I(20a) ta có $J_x=2030\text{cm}^4$; $J_y=155\text{cm}^4$. Do đó tại mặt cắt ngang, phương của đường trung hoà là :

$$\text{tg}\beta = \frac{J_x M_{y\max}}{J_y M_{x\max}} = \frac{2030 \times 2400}{155 \times 12160} = +2,58$$

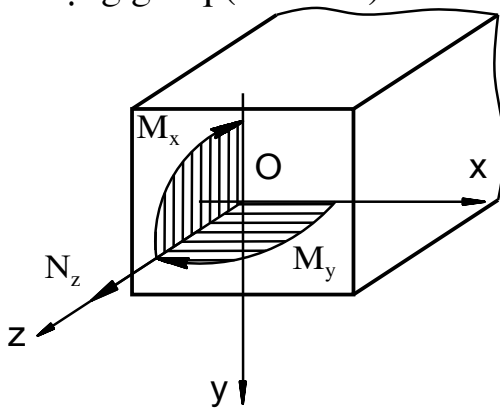
hay $\beta = +68^{\circ}50'$

III. UỐN - KÉO (NÉN) ĐỒNG THỜI

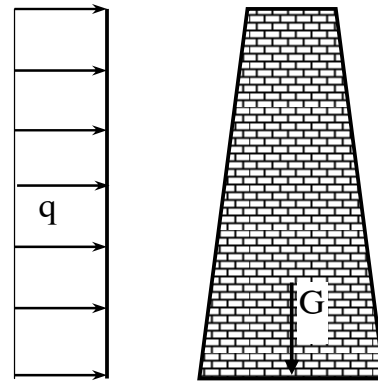
1. Định nghĩa

⇒ Một thanh được gọi là chịu uốn - kéo (nén) đồng thời khi trên MCN của thanh có các thành phần nội lực là lực dọc N_z , mômen uốn M_x, M_y (hình 7.6).

⇒ Ví dụ ống khói vừa chịu nén do trọng lượng bản thân G , vừa chịu uốn do tải trọng gió q (hình 7.7).



Hình 7.6



Hình 7.7

2. Ứng suất pháp trên MCN

⇒ Ứng suất pháp tại một điểm trên MCN được xác định theo công thức:

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x \quad (7.18)$$

$$\text{hoặc} \quad \sigma_z = \frac{N_z}{F} \cdot \left(1 + \frac{M_x}{N_z i_x^2} y + \frac{M_y}{N_z i_y^2} x \right) \quad (7.19)$$

trong đó: F - diện tích MCN;
 i_x, i_y - bán kính quán tính chính:

$$i_x = \sqrt{J_x / F}; \quad i_y = \sqrt{J_y / F};$$

J_x, J_y - mômen quán tính chính trung tâm của MCN;
 x, y - toạ độ của điểm tính ứng suất.

⇒ Quy ước dấu của N_z (chương 2), của M_x, M_y như trong uốn xiên.

⇒ Công thức kỹ thuật có dạng:

$$\sigma_z = \pm \frac{|N_z|}{F} \pm \frac{|M_x|}{J_x} |y| \pm \frac{|M_y|}{J_y} |x| \quad (7.20)$$

⇒ Các giá trị đều lấy giá trị tuyệt đối. Còn lấy dấu “+” hoặc “-” trước mỗi số hạng tùy theo lực dọc là kéo hay nén và các mômen uốn M_x, M_y gây ra ứng suất kéo hay nén ở điểm đang xét.

3. Phương trình đường trung hoà

⇒ Từ (7.18) ta suy ra phương trình đường trung hoà là:

$$\frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x = 0 \quad (7.21)$$

$$\text{hay: } 1 + \frac{M_x}{N_z i_x^2} y + \frac{M_y}{N_z i_y^2} x = 0 \quad (7.22)$$

⇒ Đường trung hoà là một đường thẳng không đi qua trọng tâm của MCN như trong uốn xiên.

4. Biểu đồ ứng suất pháp trên MCN

⇒ Tương tự như trong uốn xiên do mặt cắt ứng suất là phẳng, nên ứng suất pháp phân bố đều trên đường thẳng song song với đường trung hoà. Biểu đồ phân bố ứng suất được vẽ như hình 7.8.

5. Điều kiện bền

⇒ Điểm nguy hiểm là các điểm ở chu vi, xa đường trung hoà nhất về phía kéo hoặc phía nén. Trạng thái ứng suất của điểm nguy hiểm là trạng thái ứng suất đơn ⇒ điều kiện bền là :

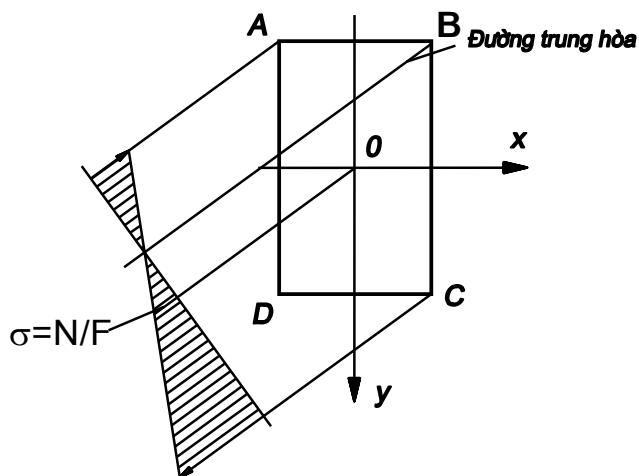
$$\text{- Đối với vật liệu dẻo: } |\sigma|_{\max} \leq [\sigma] \quad (7.23)$$

$$\text{- Đối với vật liệu giòn: } |\sigma|_{\max} \leq [\sigma]_k ; \quad |\sigma|_{\min} \leq [\sigma]_n \quad (7.24)$$

$$\text{trong đó: } \sigma_{\max} = \pm \frac{|N_z|}{F} + \frac{|M_x|}{J_x} |y| + \frac{|M_y|}{J_y} |x| \quad (7.25)$$

$$\sigma_{\min} = \pm \frac{|N_z|}{F} - \frac{|M_x|}{J_x} |y| - \frac{|M_y|}{J_y} |x| \quad (7.26)$$

x_k, y_k là toạ độ của điểm chịu kéo cách xa đường trung hoà nhất.



Hình 7.8

x_n, y_n là toạ độ của điểm chịu nén cách xa đường trung hoà nhất.

⇒ Nếu MCN của thanh có dạng như trên hình 7.4 thì lí luận tương tự như trong uốn xiên ta có:

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{|N_z|}{F} + \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \quad (7.27)$$

$$\sigma_{\min} = \pm \frac{|N_z|}{F} - \frac{|M_x|}{W_x} - \frac{|M_y|}{W_y} \quad (7.28)$$

Ví dụ 7.2: Cho một thanh chịu lực như hình 7.9a. Tìm giá trị ứng suất σ_{\max} và σ_{\min} , vị trí đường trung hoà và vẽ biểu đồ phân bố ứng suất pháp trên mặt cắt nguy hiểm. Cho: $P_1 = 160$ kN; $P_2 = 4$ kN; $P_0 = 240$ kN; $q = 2$ kN/m; $l = 2$ m; $b = 12$ cm; $h = 16$ cm.

Bài giải

Mặt cắt nguy hiểm tại đầu ngàm. Vị trí đường trung hoà và biểu đồ ứng suất pháp được vẽ trên hình 7.9b.

Lực dọc:

$$N_z = -P_0 - P_1 = -(240 + 160) = -400 \text{ kN}.$$

Mômen uốn:

$$|M_x| = \frac{P_1 h}{2} + \frac{ql^2}{2} = 160 \times 8 + \frac{2 \times 4 \times 10^4}{100 \times 2} = 1680 \text{ kNcm}$$

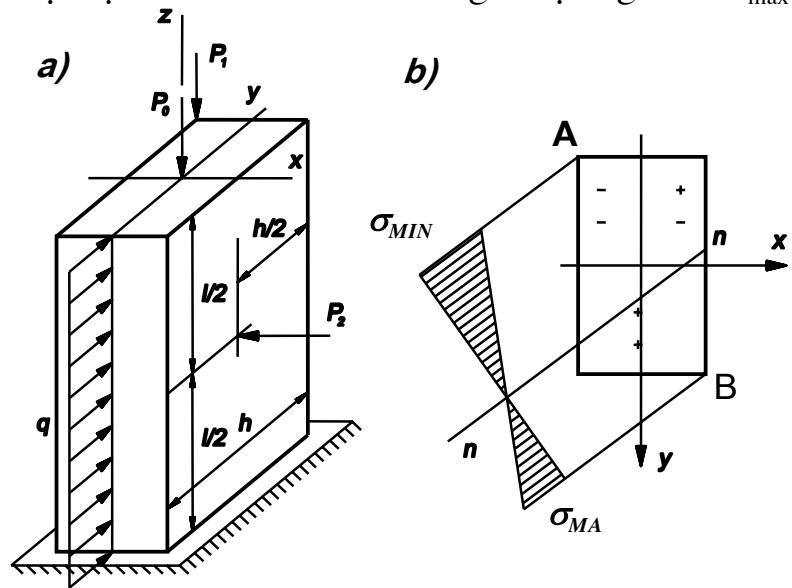
$$|M_y| = \frac{P_1 b}{2} + \frac{P_2 l}{2} = 160 \times 6 + 4 \times 10^2 = 1360 \text{ kNcm}$$

Giá trị ứng suất pháp lớn nhất và bé nhất theo (7.27), (7.28) là:

$$\sigma_{\max} = -\frac{|N_z|}{F} + \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} = -\frac{400}{12 \times 16} + \frac{1680 \times 6}{12 \times 6^2} + \frac{1360 \times 6}{16 \times 12^2} = 4,75 \text{ kNcm}$$

$$\sigma_{\min} = -\frac{|N_z|}{F} - \frac{|M_x|}{W_x} - \frac{|M_y|}{W_y} = -\frac{400}{12 \times 16} - \frac{1680 \times 6}{12 \times 6^2} - \frac{1360 \times 6}{16 \times 12^2} = -8,91 \text{ kNcm}$$

Vị trí đường trung hoà: đường trung hoà cắt trục x và trục y tại các điểm:



Hình 7.9

$$x_0 = -\frac{N_z i_y^2}{M_y} ; \quad y_0 = -\frac{N_z i_x^2}{M_x}$$

trong đó $i_x^2 = \frac{h^2}{12} = 21,3\text{cm}^2 ; i_y^2 = \frac{b^2}{12} = 12\text{cm}^2$

$$N_z < 0 ; M_x > 0 ; M_y > 0 .$$

Khi thay bằng số ta được: $x_0 = 3,53\text{cm} ; y_0 = 5,07\text{cm}$

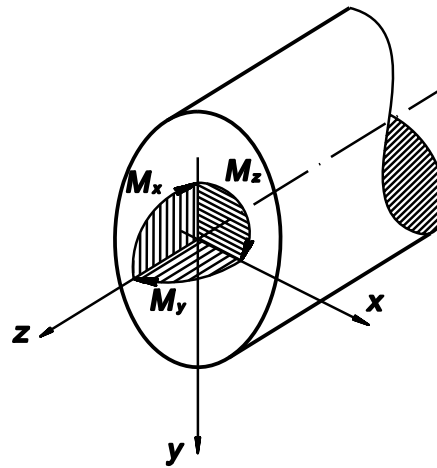
IV. UỐN - XOẮN ĐỒNG THỜI

1. Định nghĩa

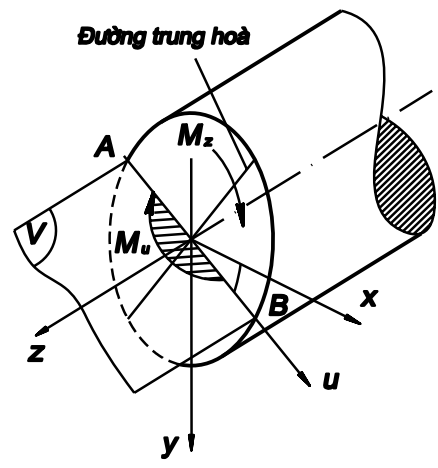
⇒ Một thanh gọi là xoắn và uốn đồng thời. Khi trên MCN của thanh có hai thành phần nội lực là mômen xoắn và mômen uốn (hình 7.10).

2. Ứng suất trên MCN tròn - điều kiện bền

⇒ Ứng suất pháp do mômen uốn gây ra. Ứng suất tiếp do mômen xoắn gây nên phân bố như trường hợp xoắn thuần túy (bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt Q).



Hình 7.10



Hình 7.11

⇒ Điểm nguy hiểm trên mặt cắt nguy hiểm là giao điểm của đường tải trọng với chu vi: điểm A hoặc B (hình 7.11). Ứng suất pháp và tiếp có giá trị:

$$\sigma_{\max}^A = |\sigma_{\min}^B| = \frac{|M_u|}{W_u} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W_u} \quad (7.29) \quad \tau_{\max}^{A,B} = \frac{M_z}{W_p} \quad (7.30)$$

⇒ Vì phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng nên điều kiện bền có dạng:

$$\sigma_{td\max} \leq [\sigma] \quad (7.31)$$

⇒ Ví dụ theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất ta có: $\sigma_{td} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$

⇒ Thay các giá trị của σ và τ theo (7.29), (7.30) và chú ý $W_p = 2W_u$, ta có:

$$\sigma_{\max} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}}{W_u} = \frac{M_{td}}{W_u} ; \quad M_{td} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \quad (7.32)$$

⇒ Theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng :

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75M_z^2}}{W_u} = \frac{M_{td}}{W_u} \text{ với } M_{td} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75M_z^2} \quad (7.33)$$

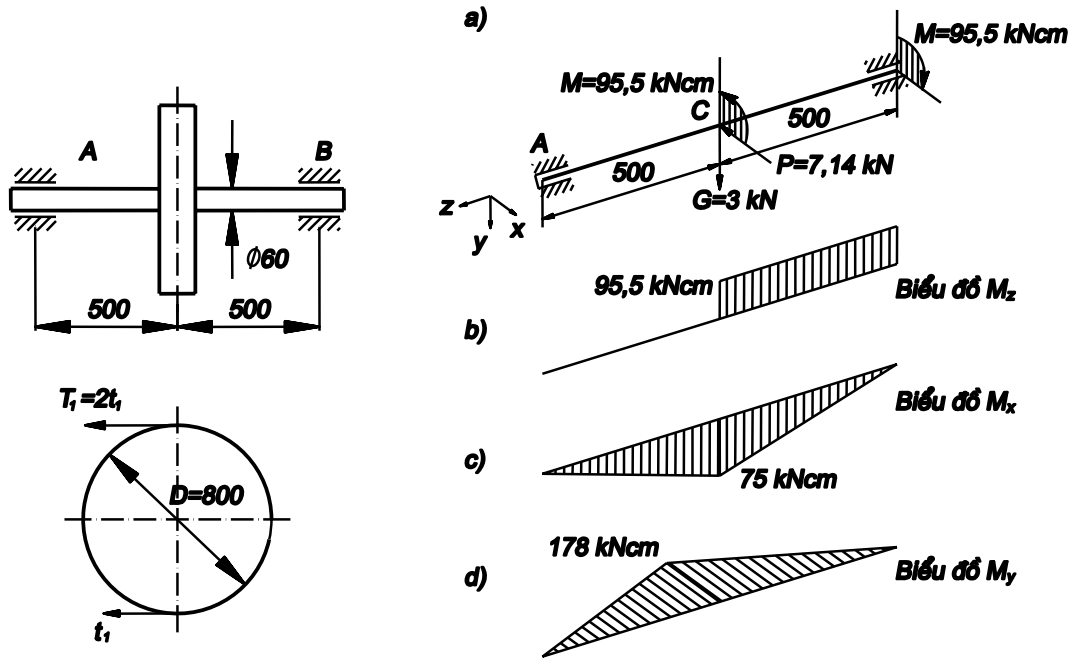
⇒ Theo thuyết bền Mo ta có: $\sigma_{td} = \sigma_1 - \alpha\sigma_3 \leq [\sigma]^k$

trong đó: $\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$; $\alpha = \frac{[\sigma]^k}{[\sigma]^n}$

với $M_{td} = \frac{1-\alpha}{2} \sqrt{M_x^2 + M_y^2} + \frac{1+\alpha}{2} \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \quad (7.34)$

M_{td} được tính theo các thuyết bền thích hợp (7.32), (7.33), (7.34).

Ví dụ 7.3: Một trục truyền bằng thép chịu lực như trên hình 7.12. Trọng lượng Puli $G = 3\text{kN}$, công suất và số vòng quay của mô tơ là: $N = 50\text{kW}$, $n = 500\text{vòng/ph}$. Kiểm tra bền trục theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng biết $[\sigma] = 12\text{kN/cm}^2$.



Hình 7.12

Bài giải: Sơ đồ chịu lực của trục biểu diễn trên hình 7.12a, trong đó:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \times 500}{30} = 52,4 \text{ rad/s}; \quad M = \frac{N}{\omega} = \frac{50}{52,4} \times 10^3 \text{ Nm} = 95,5 \text{ kNcm}$$

Lực căng dây đai xác định theo điều kiện cân bằng của mômen xoắn:

$$M = \frac{T_1 D}{2} - \frac{t_1 D}{2} = \frac{t_1 D}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{2M}{D} = \frac{2 \times 95,5}{80} = 2,38 \text{ kN}$$

$$T_1 = 2t_1 = 2 \times 2,38 = 4,76 \text{ kN}; \quad P = T_1 + t_1 = 4,76 + 2,38 = 7,14 \text{ kN}$$

Ứng suất tương đương tính theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng:

$$\sigma_{td} = \frac{M_{td}}{W_x} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75M_z^2}}{0,1 \times d^3}$$

Mặt cắt nguy hiểm tại C về phía CB, tại đó:

$$M_x = \frac{Gl}{4} = 75 \text{ kNcm}; M_y = \frac{Pl}{4} = 178 \text{ kNcm}; M_z = 95,5 \text{ kNcm}$$

Các biểu đồ nội lực được biểu diễn trên các hình 7.12b, c, d.

Thay số vào ta được:

$$\sigma_{td} = \frac{\sqrt{75^2 + 178^2 + 0,75 \times 95,5^2}}{0,1 \times 6^3} = 9,72 \text{ kN/cm}^2 < [\sigma] = 12 \text{ kN/cm}^2$$

Vậy trục thỏa mãn điều kiện bền.

V. THANH CHỊU LỰC TỔNG QUÁT

1. Định nghĩa: Một thanh chịu lực tổng quát khi trên mọi MCN của nó có đầy đủ sáu thành phần nội lực

⇒ Vì ảnh hưởng của lực cắt bé so với ảnh hưởng của các thành phần nội lực khác, nên thường ta bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt.

2. Thanh mặt cắt ngang tròn

⇒ Vì N_z gây ra ứng suất phân bố đều trên MCN nên cũng giống như thanh MCN tròn chịu uốn đồng thời với xoắn, các điểm nguy hiểm vẫn là các điểm A, B (hình 7.13).

⇒ Ứng suất pháp tại các điểm đó:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_u|}{W_x} + \frac{N_z}{F}; \sigma_{\min} = -\frac{|M_u|}{W_x} + \frac{N_z}{F}$$

Ở các điểm này ngoài giá trị ứng suất pháp cực trị, còn có ứng suất tiếp lớn nhất do xoắn gây ra:

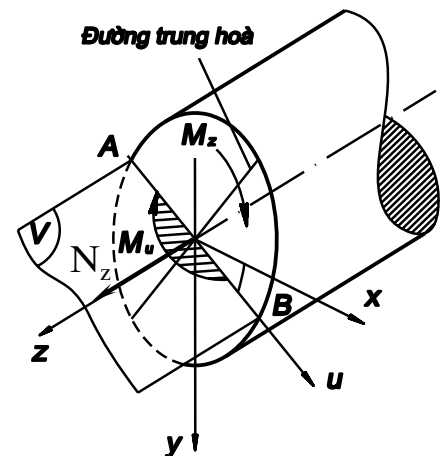
$$\tau_{\max} = \frac{|M_z|}{W_p} = \frac{|M_z|}{2W_2}$$

⇒ Các phân tố A và B ở trạng thái ứng suất phẳng. Việc kiểm tra bền các phân tố này theo các thuyết bền đã trình bày ở chương 4.

3. Thanh mặt cắt ngang hình chữ nhật

⇒ Các điểm nguy hiểm được xét tùy theo giá trị của các nội lực tác dụng trên MCN tùy theo vật liệu thanh là dẻo hay giòn.

⇒ Nói chung điểm nguy hiểm là các điểm góc, điểm giữa cạnh dài và giữa cạnh ngắn. Việc phân tích điểm nguy hiểm như trong phần uốn-xoắn đồng thời.



Hình 7.13