

# Chương 4. XOẮN THUẦN TUYẾT THANH THẲNG

## I. KHÁI NIỆM VỀ XOẮN THUẦN TUYẾT

### 1. Định nghĩa

⇒ Một thanh chịu xoắn thuần túy khi trên MCN chỉ có một thành phần nội lực là mômen xoắn  $M_z$  (hình 4.1).

⇒ Ngẫu lực P-P tạo ra mômen xoắn, có giá trị bằng P.a.

### 2. Liên hệ giữa mômen xoắn ngoại lực với công suất và số vòng quay

⇒ Công do mômen xoắn ngoại lực M (Nm) thực hiện khi trục quay một góc  $\alpha$  theo thời gian t:  $A = M\alpha$

⇒ Do đó công suất N (watt-W):  $N = \frac{A}{t} = \frac{M\alpha}{t} = M\omega \Rightarrow M = \frac{N}{\omega}$   
trong đó  $\omega$  - vận tốc góc (rad/s); n là tốc độ [vòng/phút (v/ph)].

⇒ Vận tốc góc:  $\omega = \frac{\pi n}{30} \text{ rad/s}$

⇒ Nếu công suất N tính bằng kW thì:  $M = 9549 \frac{N}{n} \text{ (Nm)}$

⇒ Nếu công suất tính bằng mã lực thì:  $M = 7162 \frac{N}{n} \text{ (Nm)}$ .

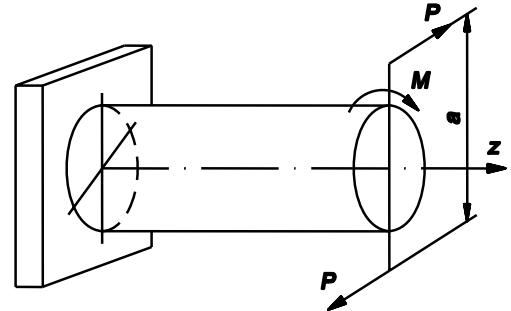
### 3. Các giả thuyết tính toán

Quan sát đoạn thanh tròn chịu xoắn (hình 4.2) trước và sau khi biến dạng, thấy:

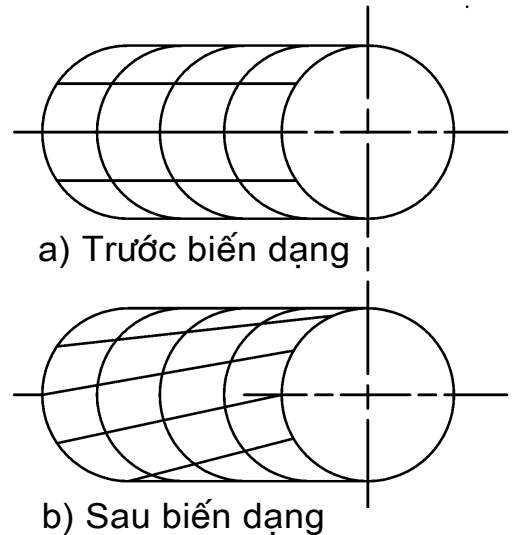
⇒ MCN ban đầu phẳng và thẳng góc với trục thanh thì sau khi biến dạng vẫn phẳng và thẳng góc với trục thanh, khoảng cách giữa các mặt cắt không thay đổi.

⇒ Các bán kính của thanh trước và sau khi biến dạng vẫn thẳng và có độ dài không đổi.

⇒ Nói một cách vắn tắt, khi thanh tròn chịu xoắn, chỉ xảy ra hiện tượng quay của tiết diện ngang quanh trục thanh. Nhận xét này đã được lí thuyết và thực nghiệm xác minh là đúng.



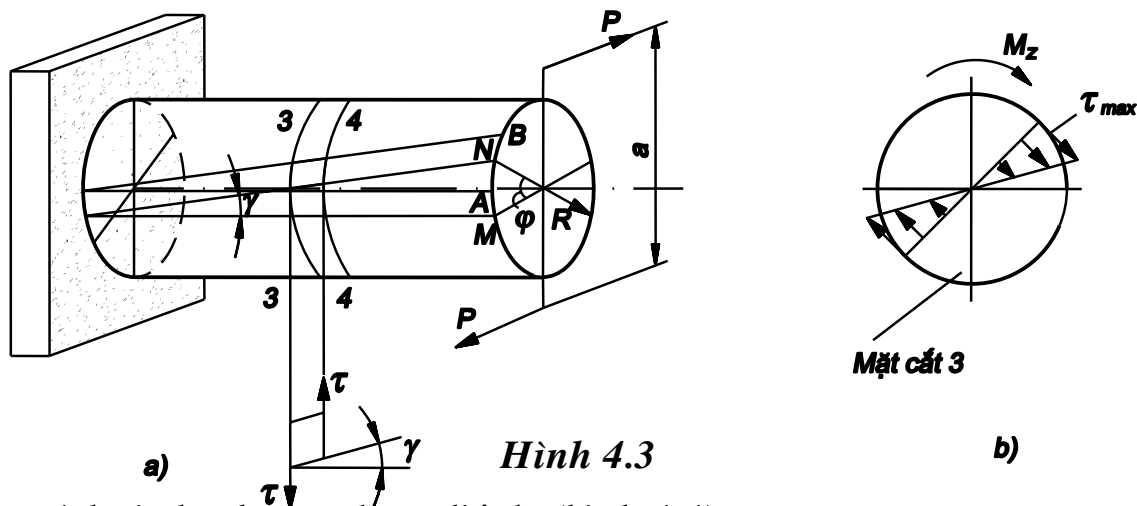
Hình 4.1



Hình 4.2

## II. ỨNG SUẤT TRÊN MẶT CẮT CỦA THANH TRÒN CHỊU XOẮN

⇒ Khảo sát một thanh tròn chịu xoắn thuần túy (hình 4.3a).



⇒ Tách từ thanh một đoạn dài dz (hình 4.4)

⇒ Theo quan hệ giữa nội lực và ứng suất ta có:

$$M_z = \int_F \tau_\rho \rho dF \quad (a)$$

⇒ Mặt khác theo định luật Húc:

$$\tau_\rho = G \cdot \gamma \quad (b)$$

$\tau_\rho$  là ứng suất tiếp trên MCN tại điểm cách trọng tâm mặt cắt một khoảng bằng  $\rho$ .

⇒ Theo hình 4.4, ta có:

$$\gamma \approx \tan \gamma = \frac{\rho d\phi}{dz} \quad (c)$$

với  $d\phi$  là góc xoắn tương đối giữa 2 mặt cắt 3-3 và 4-4; dz là khoảng cách giữa 2 mặt cắt đó.

⇒ Ký hiệu:  $\theta = \frac{d\phi}{dz}$  là góc xoắn tỷ đối.

⇒ Thay (c) vào (b) rồi vào (a), ta có:

$$M_z = \int_F G \cdot \theta \cdot \rho^2 dF = G \cdot \theta \cdot J_p \Rightarrow \theta = \frac{M_z}{G \cdot J_p} \quad (4.1)$$

⇒ Thay (4.1) vào (c) rồi vào (b), ta có:

$$\tau_\rho = \frac{M_z}{J_p} \cdot \rho \quad (4.2)$$

$$\Rightarrow \text{Ứng suất tiếp lớn nhất: } \boxed{\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p}} \quad (4.3)$$

trong đó:  $W_p = \frac{J_p}{R}$  gọi là môđun chống xoắn của mặt cắt ngang có thứ nguyên là (chiều dài)<sup>3</sup>; R là bán kính của mặt cắt ngang.

- Đối với hình tròn:  $W_p = \frac{J_p}{R} = \frac{\pi D^3}{16} \approx 0,2D^3$

- Đối với hình vành khăn:  $W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \eta^4) \approx 0,2D^3 (1 - \eta^4)$ ;  $\eta = \frac{d}{D}$

$\Rightarrow$  Biểu đồ ứng suất biểu diễn như trên hình (4.3b). Ta thấy ứng suất tiếp phân bố theo quy luật bậc nhất phụ thuộc vào khoảng cách  $\rho$  đến trọng tâm mặt cắt ngang.

### III. BIẾN DẠNG

$\Rightarrow$  Biến dạng tại mặt cắt z của thanh tròn khi xoắn được thể hiện bằng góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt ngang cách nhau một đơn vị chiều dài, gọi là *góc xoắn tỉ đối*, từ (4.1) ta có:

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GJ_p} \quad (\text{rad/m}) \quad (4.4)$$

$\Rightarrow$  Góc xoắn tương đối giữa hai MCN cách nhau một khoảng dz là

$$d\varphi = \frac{M_z}{GJ_p} dz$$

$\Rightarrow$  Góc xoắn tương đối giữa hai MCN cách nhau một khoảng l gọi là *góc xoắn tương đối* của thanh:

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_z}{GJ_p} dz \quad (\text{rad}) \quad (4.5)$$

$\Rightarrow GJ_p$  được gọi là *độ cứng xoắn*. Nếu trong suốt chiều dài l của thanh, tỷ số  $\frac{M_z}{GJ_p}$  không đổi hoặc không đổi trong từng đoạn có chiều dài  $l_i$ :

$$\boxed{\varphi = \frac{M_z l}{GJ_p}} \quad \text{hoặc} \quad \boxed{\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{M_z l_i}{G_i J_{pi}}} \quad (4.6)$$

Từ các công thức trên ta thấy khi chịu xoắn, đặc trưng hình học của MCN không phải là diện tích F mà là mômen độ cứng  $J_p$ .

## IV. TÍNH TOÁN VỀ XOẮN THUẦN TUYỆT

⇒ Đảm bảo điều kiện bền và điều kiện cứng.

### 1. Điều kiện bền

⇒ Điều kiện bền: 
$$\tau_{\max} = \frac{M_{z\max}}{W_p} \leq [\tau] \quad (4.7)$$

$[\tau]$  là ứng suất tiếp cho phép của vật liệu, xác định như sau:

$$[\tau] = \frac{[\sigma]_k}{2} \quad \text{hoặc} \quad [\tau] = \frac{[\sigma]_k}{\sqrt{3}} \quad (4.8)$$

⇒ Đối với vật liệu dẻo:  $[\tau] = \frac{\tau_{ch}}{n}$ , vật liệu giòn:  $[\tau] = \frac{\tau_B}{n}$  (4.9)

⇒ Điều kiện bền trên toàn thanh khi đường kính thay đổi:

$$\tau_{\max} = \left( \frac{M_z}{W_p} \right)_{\max} \leq [\tau] \quad (4.10)$$

⇒ Với công thức (4.7) ta có ba loại bài toán cơ bản sau:

a. Kiểm tra bền: theo công thức (4.7).

b. Chọn kích thước mặt cắt ngang: 
$$W_p \geq \frac{M_z}{[\tau]} = [W_p] \quad (4.11)$$

c. Tính tải trọng cho phép: 
$$M_z \leq W_p [\tau] = [M_z] \quad (4.12)$$

### 2. Điều kiện cứng

⇒ Góc xoắn tương đối (hay biến dạng xoắn) lớn nhất không vượt quá giới hạn cho phép:

$$\theta_{\max} = \frac{M_z}{GJ_p} \leq [\theta] \quad [\text{rad/chiều dài}] \quad \text{hoặc} \quad [\text{độ/chiều dài}] \quad (4.13)$$

trong đó  $[\theta]$  là góc xoắn tương đối cho phép (tra bảng). Nếu  $[\theta]$  được cho bằng (độ/chiều dài) ⇒ công thức quy đổi sau:

$$[\theta] \text{ rad/chiều dài} = \frac{\pi}{180} \cdot [\theta] \text{ độ/chiều dài} \quad (4.14)$$

⇒ Theo công thức 4.13 ta cũng có ba loại bài toán sau:

a. Kiểm tra điều kiện cứng: theo công thức 4.13

b. Tính kích thước mặt cắt ngang: 
$$J_p \geq \frac{M_z}{G[\theta]} = [J_p] \quad (4.15)$$

c. Tính tải trọng cho phép: 
$$M_z \leq GJ_p [\theta] = [M_z] \quad (4.17)$$

⇒ Khi tính toán theo cả điều kiện bền và cứng, điều kiện nào có ảnh hưởng nhiều hơn thì lấy kết quả theo điều kiện ấy. Đối với thanh mảnh, điều kiện cứng thường có ảnh hưởng nhiều hơn.

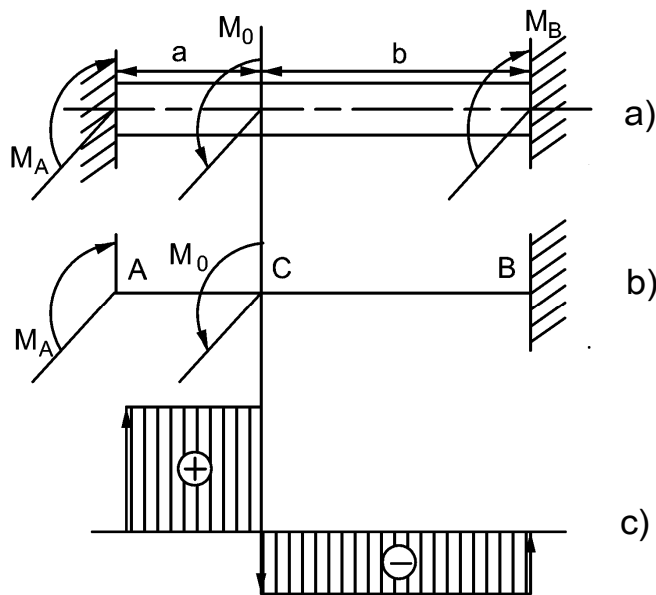
## VI. BÀI TOÁN SIÊU TĨNH VỀ XOẮN

⇒ Một thanh tròn bị ngàm ở hai đầu chịu tác dụng của ngẫu lực  $M_0$  như hình 4.9a. Vẽ biểu đồ nội lực của thanh.

⇒ Ngẫu lực liên kết  $M_A$  và  $M_B$ . Để xác định chúng, chỉ có một phương trình cân bằng tĩnh học:

$$M_A - M_0 + M_B = 0 \quad (a)$$

⇒ Muốn giải bài toán siêu tĩnh (bậc một) này, phải dựa vào điều kiện biến dạng của thanh để lập thêm một phương trình bổ sung. Tưởng tượng bỏ ngàm A và thay thế bằng phản ngẫu lực  $M_A$ , ta được thanh tĩnh định (hình 4.9b).



**Hình 4.9**

⇒ Điều kiện thay thế là góc xoắn  $\varphi_{AB}$  phải bằng không, để bảo đảm sự tương đương về biến dạng với thanh siêu tĩnh đã cho, do đó:

$$\varphi_{AB} = \varphi_{AC} + \varphi_{CB} = \frac{-M_A a}{GJ_p} + \frac{(-M_A + M_0)b}{GJ_p} = 0 \quad (b)$$

Giải phương trình trên, được:

$$M_A = \frac{b}{a+b} M_0 \quad (c)$$

thay (c) vào (a), suy ra:

$$M_B = \frac{a}{a+b} M_0 \quad (d)$$

⇒ (Nếu  $M_A$  và  $M_B$  tính được ở trên mang thêm dấu âm, thì chúng có chiều ngược với chiều giả thiết ban đầu).

⇒ Sau khi xác định được các phản ngẫu lực  $M_A$ ,  $M_B$  sẽ vẽ được biểu đồ mômen xoắn  $M_z(z)$  của thanh như hình 4.9c.

## VI. TÍNH LÒ XO XOẮN ỐC HÌNH TRỤ BƯỚC NGẮN

⇒ Xét một lò xo xoắn ốc trụ tròn, chịu lực dọc  $\bar{P}$  (hình 4.10) với:  $h$  là bước của dây lò xo,  $d$  là đường kính dây lò xo,  $D$  là đường kính trung bình của vòng dây lò xo,  $\alpha$  là góc nghiêng của các dây lò xo,  $n$  là số vòng dây lò xo.

⇒ Giả thiết:

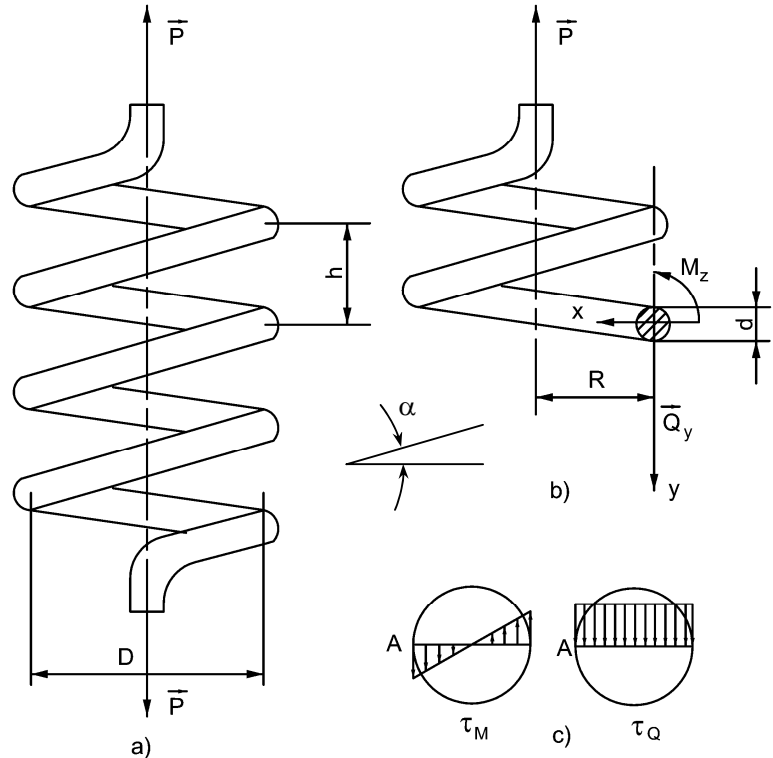
1. Góc nghiêng  $\alpha$  rất bé, bước  $h$  của lò xo không lớn lắm  $h < \frac{D}{10}$ .
2. Đường kính  $d$  và  $D$  phải thoả mãn  $d < \frac{D}{5}$ .

### 1. Ứng suất

⇒ Tưởng tượng cắt dây lò xo bằng một mặt cắt đi qua trục của lò xo và xét sự cân bằng của một trong hai phần.

⇒ Thành phần nội lực:  $Q_y = P$  và  $M_z = PR = PD/2$ .

⇒ Nếu bước  $h$  của lò xo không lớn lắm  $\Rightarrow$  MCN là hình tròn.



**Hình 4.10**

⇒ Ứng suất do ngẫu lực xoắn  $M_z$  và lực cắt  $Q_y$  gây ra đều là ứng suất tiếp, kí hiệu tương ứng là  $\tau_M$  và  $\tau_Q$ :

$$\tau_M = \frac{M_z}{J_p} \rho = \frac{PR}{J_p} \rho; \quad \tau_Q = \frac{Q_y}{F} = \frac{4P}{\pi d^2}$$

⇒ ứng suất tiếp  $\tau$  tại một điểm nào đó là tổng hình học của hai thành phần ứng suất tiếp.  $\tau_{\max}$  là tại điểm A trên biên của mặt cắt ngang, ứng với đường kính trong của lò xo (hình 4.10c).

$$\tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi d^3} + \frac{4P}{\pi d^2} = \frac{8PD}{\pi d^3} \left( 1 + \frac{d}{2D} \right)$$

⇒ Trong thực tế,  $d$  của dây lò xo thường rất bé so với  $D$  của lò xo, nên tỉ số  $d/2D$  có thể bỏ qua so với 1.

$$\Rightarrow \boxed{\tau_{\max} = k \frac{8PD}{\pi d^3}}$$

trong đó  $k$  là hệ số điều chỉnh kể đến ảnh hưởng của lực cắt  $Q_y$  và ảnh

hưởng của độ cong vòng dây lò xo:  $k = \frac{D/d + 0,25}{D/d - 1}$

$\Rightarrow$  Điều kiện bền khi tính toán lò xo là:  $\tau_{\max} = k \frac{8PD}{\pi d^3} \leq [\tau]$

## 2. Biến dạng

$\Rightarrow$  Ngoài độ bền, còn phải tính lượng co giãn của lò xo.

$\Rightarrow$  Gọi  $\lambda$  là lượng co giãn của lò xo do lực dọc  $P$  gây nên. Công của ngoại lực  $P$  trong biến dạng đó là:

$$A = \int_0^\lambda P(y) dy = \int_0^\lambda cy dy = c \frac{y^2}{2} \Big|_0^\lambda = \frac{c\lambda^2}{2} = \frac{P\lambda}{2}$$

$\Rightarrow$  Công  $A$  bằng công biến dạng đàn hồi  $U$  trong lò xo:

$$U = \int_0^\varphi M_z(\varphi) d\varphi = \int_0^\varphi c\varphi d\varphi = c \frac{\varphi^2}{2} \Big|_0^\varphi = \frac{c\varphi^2}{2} = \frac{1}{2} M_z \varphi = \frac{1}{2} M_z \frac{M_z l}{GJ_p} = \frac{1}{2} \frac{M_z^2 l}{GJ_p}$$

trong đó:  $l$  – chiều dài của dây lò xo.

$\Rightarrow$  Theo nguyên lý bảo toàn năng lượng  $A = U$ , ta có:  $P\lambda = \frac{M_z^2 l}{GJ_p}$

$\Rightarrow$  Thay trị số của  $l = \pi Dn$  và  $M_z = PD/2$ :  $\lambda = \frac{8PD^3 n}{Gd^4}$

$\Rightarrow$  Lực cần thiết để gây nên một biến dạng đơn vị của lò xo, được gọi là độ cứng của lò xo, kí hiệu là  $C$ :  $C = \frac{P}{\lambda} = \frac{Gd^4}{8D^3 n}$

$\Rightarrow$  Độ cứng của lò xo được tính bằng N/m.

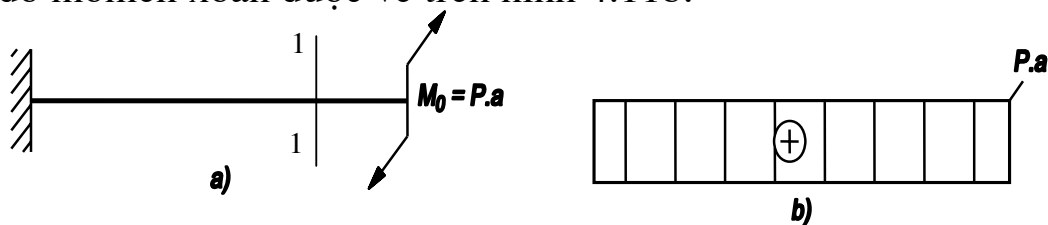
## VII. Ví dụ áp dụng

**Ví dụ 4.1:** Cho dầm đầu ngàm đầu tự do chịu mômen xoắn tập trung  $M_0$  (hình 4.11a). Vẽ biểu đồ mômen xoắn.

**Bài giải**

Sử dụng phương pháp mặt cắt, ta được:  $M_z - Pa = 0 \rightarrow M_z = Pa$

Biểu đồ mômen xoắn được vẽ trên hình 4.11b.



Hình 4.11

**Ví dụ 4.2:** Vẽ biểu đồ  $M_z$  cho thanh chịu lực như hình 4.12.

**Bài giải**

1. Phản lực tại ngàm C:

$$\sum M_z = 0 \rightarrow M_c = 900 \text{ Nm}$$

2. Chia dầm thành hai đoạn:

- Đoạn AB cắt thanh ở mặt cắt  $z_1$  ( $0 \leq z_1 \leq 40 \text{ cm}$ ) và xét sự cân bằng phần trái, ta tìm được  $M_{z_1} = 300 \text{ Nm}$ .

- Đoạn BC cắt thanh ở mặt cắt  $z_2$  và xét sự cân bằng phần phải ta có:

$$M_{z_2} = 900 - 1000 \cdot z_2$$

Vẽ biểu đồ  $M_z$  như trên hình 4.12.

**Ví dụ 4.3:** Cho một trục MCN hình vành khăn (đường kính  $d$ ,  $D$ ) chịu lực như hình 4.13a. Các puli 1, 2, 3 là bị động có công suất  $N_1 = 40$  mã lực,  $N_2 = 20$  mã lực,  $N_3 = 30$  mã lực, puli 0 là chủ động. Cho biết  $n = 1000$  vòng/phút,  $\eta = d/D = 0,6$ ,  $[\tau] = 4500 \text{ N/cm}^2$ ,  $G = 8 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$ ,  $\theta^0 = 2^\circ/\text{m}$ . Xác định  $D$ ,  $d$ .

**Bài giải:** Biểu đồ công suất được vẽ trên hình 4.13b. Mặt cắt nguy hiểm có  $N_0 = 50$  mã lực  $\Rightarrow M_{z_{\max}} = \frac{7162}{n} N = \frac{716200}{1000} 50 (\text{Ncm})$

$$\text{Chọn kích thước theo điều kiện bền (4.11), ta có:}$$

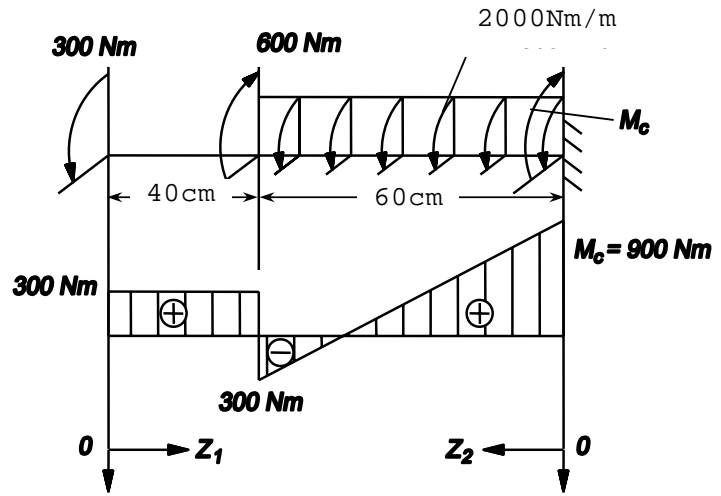
Chọn kích thước theo điều kiện bền (4.11), ta có:

$$W_p \geq \frac{M_z}{[\tau]} \Rightarrow w_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \eta^4) = \frac{716200 \cdot N_0}{n [\tau]} \Rightarrow D \geq \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \frac{716200 \cdot N_0}{n [\tau] (1 - \eta^4)}} \approx 3,64 \text{ cm}$$

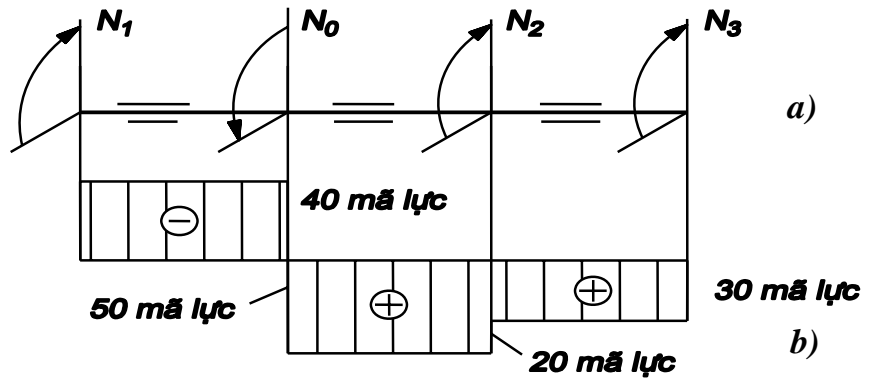
Chọn kích thước theo điều kiện cứng. Từ (4.14), ta suy ra:

$$\theta_{\max} = \frac{M_z}{GJ_p} \leq [\theta] \Rightarrow J_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \eta^4) \geq \frac{716200 N_0 \times 100 \times 180}{n \cdot G \cdot [\theta^0] \pi} \Rightarrow D = 3,49 \text{ cm}$$

so sánh ta chọn:  $D = 3,64$ ;  $d = 3,64 \cdot 0,6 = 2,18 \text{ cm}$ .



Hình 4.12



Hình 4.13

a)

b)