CHƯƠNG 5. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA CƠ HỆ

I. CƠ HỆ TỰ DO VÀ CƠ HỆ KHÔNG TỰ DO

1. Định nghĩa

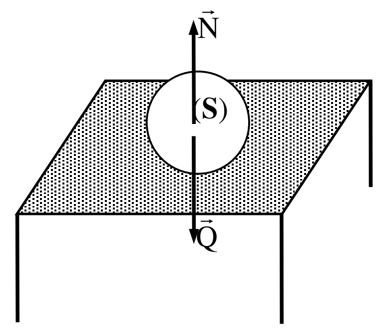
⇒ Hệ cơ học các chất điểm gọi tắt là *cơ hệ*. Cơ hệ là một tập hợp các chất điểm có vị trí và chuyển động phụ thuộc vào nhau.

⇒ Nếu giữa các chất điểm chỉ có quan hệ thuần túy về lực, ta có *cơ hệ tự do* (ví dụ hệ mặt trời), nếu giữa chúng còn có cả quan hệ về cấu hình (hay về động hình học) không phụ thuộc vào lực tác dụng ta có *cơ hệ không tự do* (ví dụ cơ cấu tay quay con trượt là một cơ hệ không tự do vì nó có cấu hình biến đổi).

⇒ Ta thường gặp các vật rắn liên quan với nhau vì vậy cũng cần tới khái niệm vật tự do và không tự do.

2. Vật rắn tự do, vật liên kết và chịu liên kết

Vật không bị ràng buộc với các vật khác và có thể di chuyển trong không gian gọi là *vật rắn tự do*. Ngược lại những vật bị ràng buộc với các vật khác và không thể di chuyển tự do được gọi là vật rắn không tự do hay gọi là *vật chịu liên kết*, còn các vật ràng buộc gọi là *vật liên kết*.



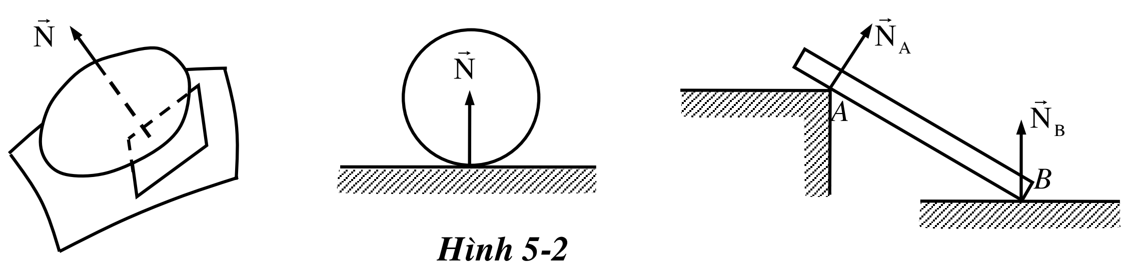
Hình 5-1

Ví dụ: Dây treo, bản lề, thanh nối, mặt tựa, ... Vật (S) đặt trên mặt bàn, bị mặt bàn cản trở dịch chuyển, được gọi là vật chịu liên kết (hình 5-1). Mặt bàn được gọi là vật liên kết.

3. Liên kết và phản lực liên kết

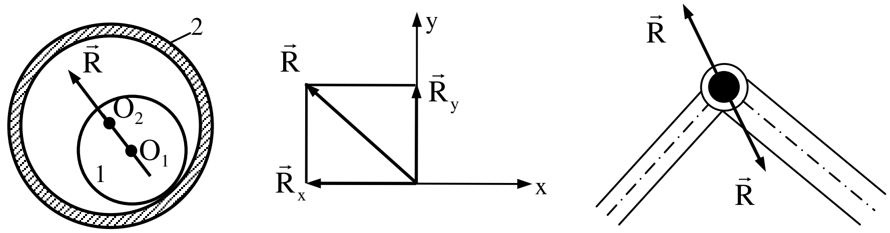
Vật (S) tác dụng lên mặt bàn một áp lực $\vec{Q}$ (hình 5-1). Mặt bàn liên kết tác dụng trở lại vật (S) lực $\vec{N}$ gọi là *phản lực liên kết*, nó đặt lên (S) có hướng ngược lại và có cùng cường độ N=Q. Các lực không phải là phản lực liên kết được gọi là các lực hoạt động.

a) Liên kết tựa: hai vật tựa trực tiếp lên nhau, chỗ tiếp xúc là bề mặt hoặc đường hoặc điểm. Phản lực tựa có phương vuông góc với mặt tựa (hoặc đường tựa)

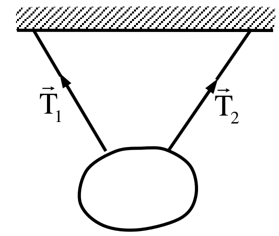


Hình 5-2

b) Liên kết dây mềm: dây mềm, không dãn, bị kéo căng. Phản lực của dây tác dụng lên vật khảo sát đặt vào điểm buộc dây và hướng vào dây. Phản lực của vật rắn tác dụng lên dây gọi là sức căng của dây, ký hiệu là $\vec{T}$. Sức căng của dây hướng dọc dây và hướng ra đối với mặt cắt dây (hình 5-3).



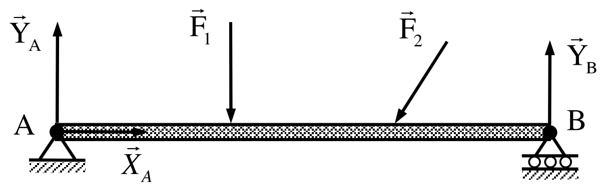
Hình 5-4



Hình 5-3

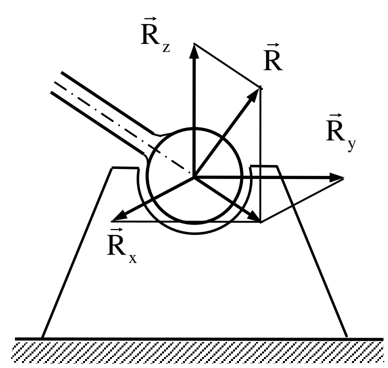
c) Liên kết bản lề: hai vật có liên kết bản lề khi chúng có trục (chốt) chung, có thể quay đối với nhau. Trong trường hợp này hai vật tựa vào nhau theo đường, nhưng điểm tựa chưa xác định. Phản lực liên kết $\vec{R}$ đi qua tâm của trục và có phương, chiều chưa xác định. Phản lực được phân ra thành hai thành phần vuông góc với nhau ($\vec{R}_x \perp \vec{R}_y$) (hình 5-4).

- *Liên kết gối*: dùng để đỡ các dầm, khung,… Có loại gối cố định và gối con lăn. Phản lực liên kết của gối cố định được xác định như liên kết bản lề, còn phản lực liên kết của gối con lăn được tìm theo quy tắc của phản lực liên kết tựa (hình 5-5).



Hình 5-5

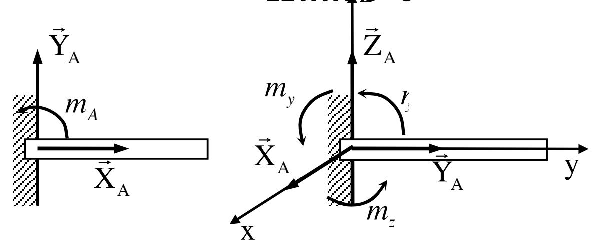
- *Liên kết gối cầu*: được thực hiện nhờ một quả cầu gắn vào đầu một vật gây liên kết xoay được trong một hốc hình cầu. Phản lực gối cầu $\vec{R}$ đi qua tâm quả cầu và có phương chiều chưa xác định. Thường phản lực $\vec{R}$ được phân thành ba thành phần vuông góc ($\vec{R}_x, \vec{R}_y, \vec{R}_z$) (hình 5-6).



Hình 5-6

d) Liên kết ngàm: là liên kết khi vật được nối cứng vào một vật khác (ví dụ, hàn). Trong trường hợp ngàm phẳng, phản lực liên kết gồm hai lực thẳng góc với nhau và một ngẫu lực nằm trong mặt phẳng chứa hai lực (hình 5-7a).

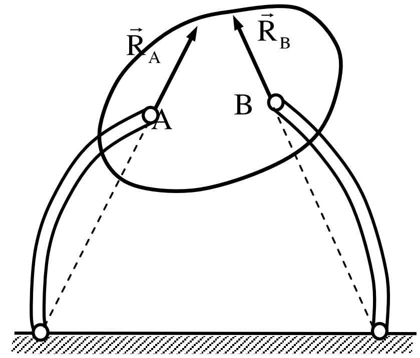
Đối với ngàm không gian, phản lực liên kết gồm ba thành phần lực vuông góc với nhau (dọc theo ba trục toạ độ) và ba thành phần ngẫu lực trong ba mặt phẳng toạ độ (hình 5-7b).



(a) (b)

Hình 5-7

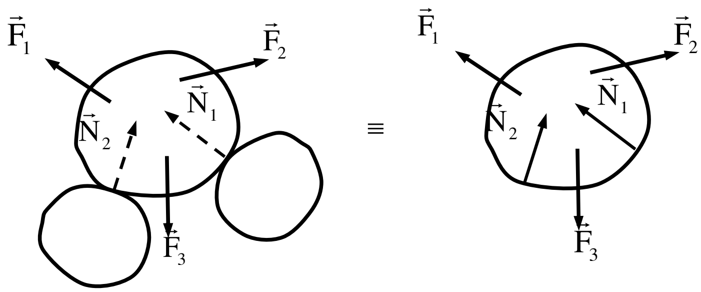
e) Liên kết thanh: hai vật được nối với nhau bằng thanh cứng (có thể là thẳng hoặc cong) thoả mãn điều kiện sau: chỉ có lực tác dụng ở hai đầu, còn dọc thanh không có lực tác dụng và trọng lượng thanh được bỏ qua (ví dụ, các thanh không trọng lượng, liên kết bằng liên kết trụ hoặc cầu). Phản lực liên kết có phương qua hai điểm chịu lực (hình 5-8).



Hình 5-8

4. Giải phóng liên kết

Một vật rắn không tự do cân bằng có thể xem là một vật rắn tự do cân bằng nếu ta bỏ đi các liên kết và thay vào đó các thành phần phản lực liên kết tương ứng. Trong trường hợp này hệ lực cân bằng tác dụng lên vật rắn bao gồm cả lực chủ động và phản lực liên kết (hình 5-9).



Hình 5-9

II. MÔMEN KHỐI LƯỢNG

1. Các định nghĩa

⇒ Xét cơ hệ gồm n chất điểm, mỗi chất điểm thứ K nào đó có tọa độ và khối lượng là x_K, y_K, z_K và m_K.

⇒ Mômen khối lượng cấp m=α+β+γ được định nghĩa như sau: "*Biểu thức* $\sum_{K=1}^{n} m_K x_K^{\alpha} y_K^{\beta} z_K^{\gamma}$ *đối với chất điểm rời rạc,* $\int_M x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} dm$ *đối với hệ chất điểm liên tục gọi là mômen khối lượng cấp m=α+β+γ của cơ hệ đối với hệ tọa độ Oxyz.*"

2. Mômen khối lượng cấp 0.

⇒ Khi α=β=γ=0, ta có mômen khối lượng cấp 0, khi đó:

$$\sum_{K=1}^{n} m_K = M \int_M dm = M$$ gọi là khối lượng của cơ hệ.

3. Mômen khối lượng cấp 1

⇒ Nếu cho α=1, β=γ=0 ta có $\sum_{K=1}^{n} m_K x_K = S_{(yz)}$ hay $\int_M x.dm = S_{(yz)}$ gọi là mômen khối lượng cấp một của hệ đối với mặt phẳng tọa độ yz.

⇒ Tương tự ta có mômen khối lượng cấp một khác $S_{(zx)}$ và $S_{(xy)}$.

⇒ Vị trí của khối tâm C: $x_C = \frac{S_{(yz)}}{M}, y_C = \frac{S_{(zx)}}{M}, z_C = \frac{S_{(xy)}}{M}$

4. Mômen khối lượng cấp 2:

⇒ Nếu cho α=2, β=γ=0 ta có $\sum_{K=1}^{n} m_K x_K^2 = J_{(yz)}$ hay $\int_M x.dm = S_{(yz)}$ gọi là mômen khối lượng cấp hai (mômen quán tính) của hệ đối với mặt phẳng tọa độ yz.

⇒ Tương tự ta có mômen khối lượng cấp hai khác $J_{(zx)}$ và $J_{(xy)}$.

⇒ Đại lượng $\sum_{K=1}^{n} m_K \left(x_K^2 + y_K^2 + z_K^2\right) = \sum_{K=1}^{n} m_K r_K^2 = J_O$ gọi là mômen khối lượng cấp 2 đối với điểm O (mômen quán tính độc cưc).

⇒ Đại lượng $\sum_{K=1}^{n} m_K x_K y_K = J_{xy}$ hay $\int_M xy.dm = J_{xy}$ gọi là mômen khối lượng hỗn hợp (mômen quán tính ly tâm).

II. MÔMEN DIỆN TÍCH

1. Mômen diện tích cấp 1 (mômen tĩnh của mặt cắt ngang)

⇒ Hình phẳng F nằm trong mặt phẳng toạ độ Oxy (hình 5.10).

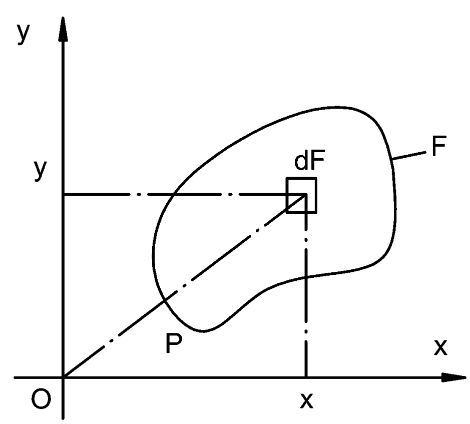
⇒ Người ta gọi tích phân:

$$\int_F x^m y^n dF \qquad (5.1)$$

là *mômen diện tích hỗn hợp cấp (m+n)* của hình phẳng F đối với hệ Oxy.

⇒ Khi m = 0, n = 1 tích phân (5.1) có dạng:

$$\boxed{S_x = \int_F ydF} \qquad (m^3) \qquad (5.2)$$



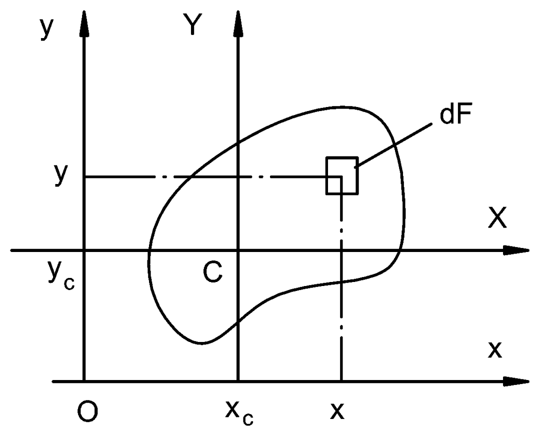
Hình 5.10

⇒ Khi m = 1, n = 0 tích phân (5.1) có dạng: $\boxed{S_y = \int_F xdF}$ (m^3) (5.3)

⇒ S_x và S_y được gọi là *mômen diện tích cấp một* hay ***mômen tĩnh*** của hình phẳng đối với trục x và trục y.

⇒ Khi $S_X = S_Y = 0$ thì trục X, Y được gọi là *trục trung tâm*. Giao điểm của hai trục trung tâm là *trọng tâm* của hình phẳng. (hình 5.11).

⇒ Công thức xác định toạ độ của trọng tâm C cũng tương tự như công thức xác định toạ độ của khối tâm:



Hình 5.11

$$\boxed{x_C = \frac{S_y}{F}};\quad \boxed{y_C = \frac{S_x}{F}} \qquad (5.4)$$

⇒ Nếu diện tích F bao gồm nhiều diện tích đơn giản F_i:

$$\boxed{x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i F_i}{F}};\quad \boxed{y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i F_i}{F}} \qquad (5.5)$$

trong đó x_i, y_i là toạ độ trọng tâm của diện tích F_i.

2. Mômen diện tích cấp 2 (mômen quán tính)

⇒ Khi m = n = 1, tích phân (5.1) có dạng:

$$\boxed{J_{xy} = \int_F xy\,dF} \qquad (m^4) \qquad (5.6)$$

được gọi là *mômen diện tích hỗn hợp cấp hai,* hay ***mômen quán tính li tâm*** của hình phẳng đối với hệ trục Oxy.

⇒ Khi m = 0, n = 2 hoặc m = 2, n = 0, các tích phân:

$$\boxed{J_x = \int_F y^2 dF} \quad \text{và} \quad \boxed{J_y = \int_F x^2 dF} \qquad (5.7)$$

được gọi là ***mômen quán tính*** (hay *mômen diện tích cấp hai*) của hình phẳng F đối với trục x hoặc trục y.

⇒ J_{xy} có thể dương hoặc âm, còn các J_x, J_y luôn luôn dương.

Tổng: $J_x + J_y = \int_F \left(y^2 + x^2\right) dF = \int_F \rho^2 dF = J_p$ (5.8)

được gọi là ***mômen quán tính độc cực*** đối với gốc toạ độ O.

⇒ Nếu $J_{xy} = 0$ thì hệ trục được gọi là *hệ trục quán tính chính*. Nếu $J_{xy}=0$, $S_x=S_y=0$ thì ta có *hệ trục quán tính chính trung tâm.*

3. Công thức chuyển trục song song của mômen quán tính

⇒ Công thức chuyển trục song song mômen quán tính của hệ trục OXY với hệ trục trung tâm oxy (hình 5.12):

$$J_X = J_x + Fb^2$$
$$J_Y = J_y + Fa^2 \qquad (5.9)$$
$$J_{XY} = J_{xy} + Fab$$

⇒ Chứng minh các công thức (5.9) như sau:

Ta có: $X = x + a$; $Y = y + b$ (a)

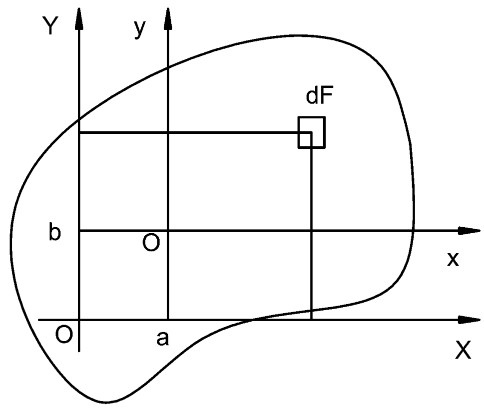
⇒ Theo định nghĩa:

$$J_X = \int_F Y^2 dF,\ J_Y = \int_F X^2 dF,\ J_{XY} = \int_F XY dF \quad (b)$$

⇒ Thay (a) vào (b) suy ra:

$$J_X = J_x + 2bS_x + Fb^2;\ \ J_Y = J_y + 2aS_y + Fa^2;$$
$$J_{XY} = J_{xy} + aS_x + bS_y + Fab$$

⇒ Khi x và y là các trục trung tâm thì $S_x = S_y = 0$ ⇒ (5.9).



Hình 5.12

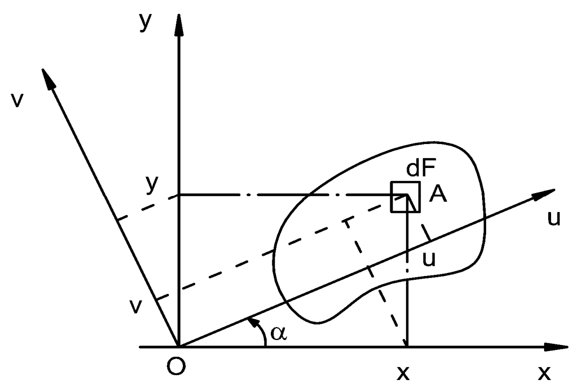
4. Công thức xoay trục của mômen quán tính

⇒ Cho biết J_x, J_y, J_{xy} của hình phẳng F đối với hệ trục Oxy. Hãy tính J_u, J_v, J_{uv} của hình phẳng F đối với hệ trục Ouv (hình 5.13). Ta có:

$$u = x\cos\alpha + y\sin\alpha$$
$$v = y\cos\alpha - x\sin\alpha$$

$$J_u = \int_F v^2 dF\ ;\ J_v = \int_F u^2 dF\ ;\ J_{uv} = \int_F uv dF$$

⇒ Thay u, v ở trên và khai triển các tích phân này, ta được:



Hình 5.13

$$\boxed{\begin{aligned} J_u &= \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2}\cos 2\alpha - J_{xy}\sin 2\alpha \\ J_v &= \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_x - J_y}{2}\cos 2\alpha + J_{xy}\sin 2\alpha \\ J_{uv} &= \frac{J_x - J_y}{2}\sin 2\alpha + J_{xy}\cos 2\alpha \end{aligned}} \qquad (5.10)$$

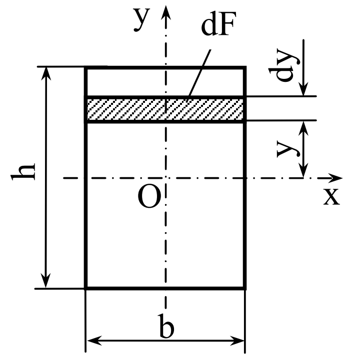
Nếu hệ trục Ouv là hệ trục quán tính chính ($J_{uv} = 0$) thì phương các trục quán tính chính rút ra từ công thức thứ ba của (5.10):

$$\boxed{\mathrm{tg}\alpha = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}} \qquad (5.11)$$

5. Mômen quán tính của một số mặt cắt ngang

a. Hình chữ nhật (hình 5.14)

Hệ trục đối xứng Oxy là hệ trục quán tính chính trung tâm.

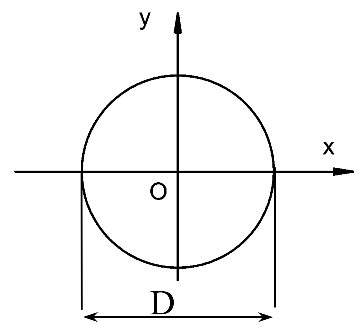


Hình 5.14

Ta có: $J_x = \int_F y^2 dF = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = \frac{1}{3} b y^3 \Big|_{+\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}}$

hay: $\boxed{J_x = \frac{bh^3}{12}} \Rightarrow \boxed{J_y = \frac{hb^3}{12}}$ (5.14)

b. Hình tròn (hình 5.15)



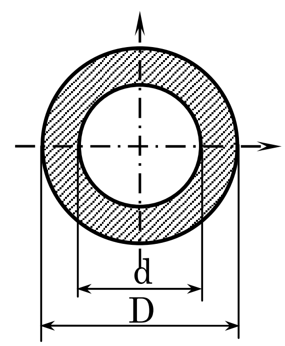
Hình 5.15

Đối với hệ trục trung tâm Oxy: $J_x = J_y = \frac{J_p}{2}$

trong đó: $\boxed{J_p = \frac{\pi R^4}{2} \approx 0,1D^4}$ nên:

$$\boxed{J_x = J_y = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64} \approx 0,05D^4} \quad (5.15)$$

c. Hình vành khăn



Hình 5.16

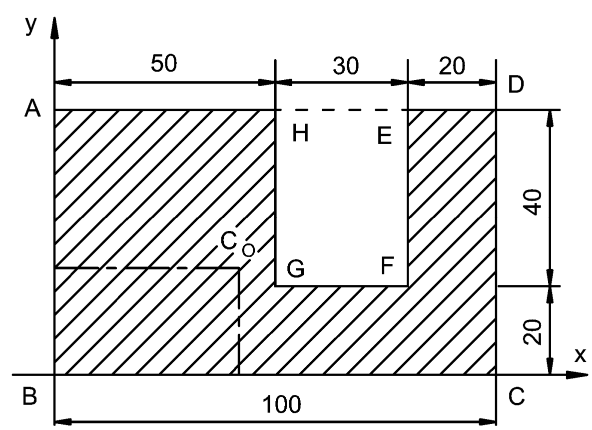
Đối với hình vành khăn có đường kính ngoài D và đường kính trong d:

$$\boxed{J_x = J_y = \frac{1}{2} J_p = \frac{\pi D^4}{64}\left(1-\eta^4\right) \approx 0,05D^4\left(1-\eta^4\right)};$$

$\eta = d/D$ (5.16)

IV. Ví dụ áp dụng

Ví dụ 4.1. Xác định vị trí trọng tâm C_o và các mômen diện tích cấp hai J_x, J_y của mặt cắt cho trên hình 5.17 (đơn vị là cm).



Hình 5.17

Giải

Coi mặt cắt đã cho là hiệu của hai hình chữ nhật ABCD (kí hiệu là 1) và EFGH (kí hiệu là 2). Ta có:

$$S_x = S_x^1 - S_x^2$$

trong đó:

$$S_x^1 = F_1 y_{C_1} = (100 \times 60)\left(\frac{60}{2}\right) = 180.000\,cm^3$$

$$S_x^2 = F_2 y_{C_2} = (30 \times 40)\left(20 + \frac{40}{2}\right) = 48.000\,cm^3$$

Do đó:

$$S_x = 180.000 - 48.000 = 132.000 cm^3 ; \quad S_y = S_y^1 - S_y^2$$

trong đó:

$$S_y^1 = F_1 x_{C_1} = (100 \times 60)\left(\frac{100}{2}\right) = 300.000 cm^3$$

$$S_y^2 = F_2 x_{C_2} = (30 \times 40)\left(50 + \frac{30}{2}\right) = 78.000 cm^3$$

Vậy:

$$S_y = 300.000 - 78.000 = 222.000 cm^3$$

Toạ độ trọng tâm C_o của mặt cắt là:

$$x_{C_o} = \frac{S_y}{F} = \frac{222.000}{(100 \times 60) - (30 \times 40)} = 46,25 cm ;$$

$$y_{C_o} = \frac{S_x}{F} = \frac{132.000}{4800} = 27,5 cm$$

Mômen quán tính:

$$J_x = J_x^1 - J_x^2$$

trong đó: $$J_x^1 = \frac{b_1 h_1^3}{3} = \frac{100 \times 60^3}{3} = 72 \times 10^5 cm^4$$

$$J_x^2 = \frac{b_2 h_2^3}{12} + F_2 y_{C_2}^2 = \frac{30 \times 40^3}{12} + (30 \times 40).40^2 = 20,8 \times 10^5 cm^4$$

Do đó:

$$J_x = (72 - 20,8)10^5 = 51,2 \times 10^5 cm^4 ;$$

Mômen quán tính:

$$J_y = J_y^1 - J_y^2$$

trong đó: $$J_y^1 = \frac{h_1 b_1^3}{3} = \frac{60 \times 100^3}{3} = 20 \times 10^6 cm^4$$

$$J_y^2 = \frac{h_2 b_2^3}{12} + F_2 x_{C_2}^2 = \frac{40 \times 30^3}{12} + (30 \times 40).65^2 = 5,16 \times 10^6 cm^4$$

Vậy

$$J_y = (20 - 5,16)10^6 = 14,84 \times 10^6 cm^4.$$